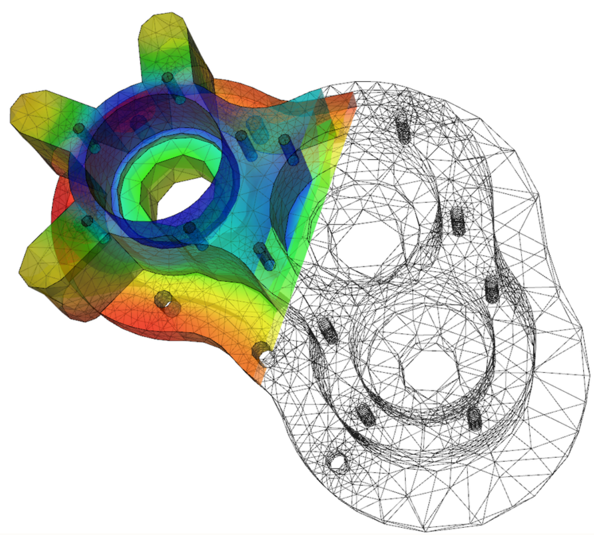
Universidad Simón Bolívar

MA-3111

RECOPILACIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS VII



Recopilado, resuelto y tipeado en LaTeX

José A. Da Silva R.

Febrero 2021

Índice General

Cuando muere, todo el mundo debe dejar algo detrás, decía mi abuelo. Un hijo, un libro, un cuadro, una casa, una pared levantada o un par de zapatos. O un jardín plantado. Algo que tu mano tocará de un modo especial, de modo que tu alma tenga algún sitio a donde ir cuando tú mueras, y cuando la gente mire ese árbol, o esa flor, que tú plantaste, tú estarás allí. No importa lo que hagas -decía-, en tanto que cambies algo respecto a como era antes de tocarlo, convirtiéndolo en algo que sea como tú después de que separes de ellos tus manos. La diferencia entre el hombre que se limita a cortar el césped y un auténtico jardinero está en el tacto. El cortador de césped igual podría no haber estado allí, el jardinero estará allí para siempre.

Fahrenheit 451
Ray Bradbury

1 Motivación

Mi motivación en la realización de todas las guías de ejercicios que encontrarán de mi autoría recae sobre el gran amor que le tengo a mi alma mater, la Universidad Simón Bolívar. A mediados de mi carrera universitaria sabía que no quería irme de los pasillos de la USB sin dejarle algo de mí, como ella lo había hecho conmigo.

De ahí nace este gran proyecto personal de transcribir todos esos ejercicios, notas, procedimientos, análisis, creación de programas numéricos, entre otros; que recibí de mis grandes maestros y los que son de mis propias manos, con el fin de ser un material de estudio para los venideros estudiantes en su camino por el mundo de la excelencia de la USB. A través de estos documentos, busco ayudar a mi universidad a seguir siendo un atractivo para los estudiantes regulares y aquellas personas que quieran trabajar por ella.

¿Por qué? Porque las universidades son fuente de conocimiento y, si es bien conducido este gran poder, nos separará de la barbarie e ignorancia que intentan destruir fervientemente a la primera desde hace bastante tiempo.

A pesar de las dificultades que supone estudiar en una universidad pública venezolana, me encontré en los salones de clases a increíbles compañeros que compartíamos el mismo sueño y a excelentes maestros que eternamente estaremos agradecidos con la dedicación, compromiso, tiempo y paciencia al mostrarnos el camino del conocimiento. En las dependencias administrativas, encontré un personal que, a pesar que su labor es "invisible" en nuestro día a día de estudiantes universitarios, hacen todo lo posible para que la universidad sea un sistema interconectado y funcione de la mejor manera. Y, a todo el personal de transporte y limpieza, que representan los pequeños pero importantes engranajes de un gran sistema como la USB.

Ninguno de ellos se les da una cantidad remotamente similar a lo que debería atribuírsele económicamente por su gran trabajo y esfuerzo diario y, aún así, estuvieron presente para que cada uno de nosotros tuviese un lugar en el salón de clases, en las agrupaciones estudiantiles, en la soñada graduación, entre otros. Por eso, más en estos momentos, es donde la USB necesita la ayuda de su gente.

2 Funciones Generalizadas

1. *Exprese la función generalizada* $F(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{7}}\delta''(x)$ *como combinación lineal de* $\delta(x)$ *y sus derivadas.*

   Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos, aplicando propiedades de las funciones generalizadas:

$$< F(x)\,|\,\phi(x) > = < (1-x^2)^{\frac{1}{7}}\delta''(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta''(x)\,|\,(1-x^2)^{\frac{1}{7}}\phi(x) >= ...$$

$$... = \ (-1) < \delta'(x)\,|\,[(1-x^2)^{\frac{1}{7}}\phi(x)]' >= \ (-1)(-1) < \delta(x)\,|\,[(1-x^2)^{\frac{1}{7}}\phi(x)]'' > = ...$$

$$... = < \delta(x)\,|\,[f(x)\phi(x)]'' > = < \delta(x)\,|\,f''(x)\phi(x) + 2f'(x)\phi'(x) + f(x)\phi''(x) >$$

donde, tenemos que:

$$f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{7}} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{2}{7}x(1-x^2)^{-\frac{6}{7}} \Longrightarrow f''(x) = -\frac{2}{7}\left((1-x^2)^{-\frac{6}{7}} + \frac{12}{7}x^2(1-x^2)^{-\frac{13}{7}}\right)$$

Así, aplicando la definición de la Delta de Dirac:

$$< F(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta(x)\,|\,f''(x)\phi(x) + 2f'(x)\phi'(x) + f(x)\phi''(x) > = ...$$

$$... = f''(0)\phi(0) + 2f'(0)\phi'(0) + f(0)\phi''(0) = \left(-\frac{2}{7}\right)\phi(0) + (1)\phi''(0)$$

Ahora, aplicando el proceso inverso de la Delta de Dirac:

$$-\frac{2}{7}\phi(0) + \phi''(0) = < \delta(x)\,|\,-\frac{2}{7}\phi(x) + \phi''(x) > = < \delta(x)\,|\,-\frac{2}{7}\phi(x) > + < \delta(x)\,|\,\phi''(x) > = ...$$

$$... = \ -\frac{2}{7} < \delta(x)\,|\,\phi(x) > +(-1) < \delta'(x)\,|\,\phi'(x) > = < -\frac{2}{7}\delta(x)\,|\,\phi(x) > +(-1)^2 < \delta''(x)\,|\,\phi(x) > = ...$$

$$... = < -\frac{2}{7}\delta(x) + \delta''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Finalmente, tenemos que:

$$< F(x)\,|\,\phi(x) > = < -\frac{2}{7}\delta(x) + \delta''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Por lo tanto, usando la igualdad de funciones generalizadas actuando sobre una función de prueba cualquiera concluimos que:

$$\boxed{F(x) = -\frac{2}{7}\delta(x) + \delta''(x)}$$

2. *Expresar la distribución*

$$\sin(x)\left[\frac{d}{dx}\left(\sin(3x)\delta'(x)\right)\right]$$

como combinación lineal de $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\delta''(x)$.

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ, tenemos:

$$< \sin(x)\left[\sin(3x)\delta'(x)\right]' \mid \phi(x) > = < \left[\sin(3x)\delta'(x)\right]' \mid \sin(x)\phi(x) > = ...$$

$$... = \; - < \sin(3x)\delta'(x) \mid \left[\sin(x)\phi(x)\right]' > = \; - < \delta'(x) \mid \sin(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]' > = ...$$

$$... = < \delta(x) \mid \big(\sin(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]'\big)' > = \; \big(\sin(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]'\big)'\,|_{x=0}$$

Expresando la derivada del término de la derecha:

$$\big(\sin(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]'\big)' = \big(3\cos(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]' + \sin(3x)\left[\sin(x)\phi(x)\right]''\big) = ...$$

$$... = \big(3\cos(3x)\left[\cos(x)\phi(x) + \sin(x)\phi'(x)\right] + \sin(3x)\left[\cos(x)\phi(x) + \sin(x)\phi'(x)\right]'\big) = ...$$

$$... = (3\cos(3x)\left[\cos(x)\phi(x) + \sin(x)\phi'(x)\right] + ...$$

$$... + \sin(3x)\left[(-\sin(x)\phi(x) + \cos(x)\phi'(x)) + (\cos(x)\phi'(x) + \sin(x)\phi''(x))\right]) \; = ...$$

$$... = \left[3\cos(3x)\cos(x) - \sin(3x)\sin(x)\right]\phi(x) + \left[3\cos(3x)\sin(x) + 2\sin(3x)\cos(x)\right]\phi'(x) + ...$$

$$... + \left[\sin(3x)\sin(x)\right]\phi''(x)$$

Evaluando en $x = 0$ tenemos que:

$$\big(\sin(3x)\,[\sin(x)\phi(x)]'\big)'\,|_{x=0} = 3\phi(x)$$

Entonces, tenemos:

$$< \sin(x)\,[\sin(3x)\delta'(x)]'\ |\ \phi(x) >=\ 3\phi(x)$$

$$3\phi(x) =< \delta(x)\,|\,3\phi(x) >=< 3\delta(x)\,|\,\phi(x) >$$

Finalmente, obtenemos que:

$$< \sin(x)\,[\sin(3x)\delta'(x)]'\ |\ \phi(x) >=< 3\delta(x)\,|\,\phi(x) >$$

Por lo tanto, podemos concluir que la distribución inicial puede ser expresada como:

$$\boxed{\sin(x)\,[\sin(3x)\delta'(x)]' = 3\phi(x)}$$

3. *Demuestre que* $\dfrac{d}{dx}\big((1+x^2)\delta(x-1)\big) = 2\delta'(x-1)$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< \frac{d}{dx}\big((1+x^2)\delta(x-1)\big)\ |\ \phi(x) >=\ -< (1{+}x^2)(\delta(x{-}1))\,|\,\phi'(x) >=\ -< \delta(x{-}1)\,|\,(1{+}x^2)\phi'(x) >= ...$$

$$... =\ -(1{+}1^2)\phi'(1) = -2\phi'(1) =< \delta(x{-}1)\,|\,{-2}\phi'(x) >=\ -2 < \delta(x{-}1)\,|\,\phi'(x) >=\ 2 < \delta'(x{-}1)\,|\,\phi(x) >$$

Tenemos que:

$$< \frac{d}{dx}\big((1+x^2)\delta(x-1)\big)\ |\ \phi(x) >=< 2\delta'(x-1)\,|\,\phi(x) >$$

Podemos concluir:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\big((1+x^2)\delta(x-1)\big)\ =\ 2\delta'(x-1)}$$

4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$f(x) = (1-x)\,(H(x) - H(x-1))$$

(a) *Calcule $f''_{gen}(x)$*

(b) *Sea $\lambda > 0$. Halle $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)e^{\lambda x}dx$*

Solución: Veamos que f puede ser vista como:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \wedge x > 1 \end{cases}$$

Derivamos de forma generalizada una vez:

$$f'_{gen}(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \wedge x > 1 \end{cases} + (1-0)\delta(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \wedge x > 1 \end{cases} + \delta(x)$$

Por segunda vez:

$$f''_{gen}(x) = \delta'(x) + (-1-0)\delta(x) + (0-(-1))\delta(x-1) = \delta'(x) - \delta(x) + \delta(x-1)$$

Así:

$$\boxed{f''_{gen}(x) = \delta'(x) - \delta(x) + \delta(x-1)}$$

Veamos que la integral $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)e^{\lambda x}dx$ si usamos la función de Heaviside podemos "arreglar" la integral de forma que podamos usar las herramientas de funciones generalizadas. Así:

$$I(\lambda) = \int_0^1 (1-x)e^{\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} [H(x) - H(x+1)]\,(1-x)e^{\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\lambda x}dx$$

Véase que de la última igualdad obtuvimos a la función f del apartado anterior.

También note la forma final que adoptó la integral. Puede decirse que f es una función generalizada que se encuentra actuando sobre la función de prueba $e^{\lambda x}$. Entonces podemos afirmar que:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\lambda x}dx = < f(x)\,|\,e^{\lambda x} >$$

Aprovechamos la particularidad de la función e^x en términos de su derivada. Notemos que:

$$e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\lambda x}\right)$$

Así, usando propiedades de funciones generalizadas:

$$I(\lambda) = < f(x) \,|\, \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\lambda x}\right) = \frac{1}{\lambda^2} < f''_{gen}(x) \,|\, e^{\lambda x} > = \frac{1}{\lambda^2} < \delta'(x) - \delta(x) + \delta(x-1) \,|\, e^{\lambda x} > = ...$$

$$... = \frac{1}{\lambda^2}\left[< \delta'(x) \,|\, e^{\lambda x} > - < \delta(x) \,|\, e^{\lambda x} > + < \delta(x-1) \,|\, e^{\lambda x} >\right] = ...$$

$$... = \frac{1}{\lambda^2}\left[- < \delta(x) \,|\, \lambda e^{\lambda x} > - e^{\lambda \cdot 0} + e^{\lambda \cdot 1}\right] = \frac{1}{\lambda^2}\left[-\lambda e^{\lambda \cdot 0} - 1 + e^{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda^2}\left[-\lambda - 1 + e^{\lambda}\right]$$

Entonces, finalmente tenemos que:

$$\boxed{I(\lambda) = \int_0^1 (1-x)e^{\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{\lambda} - 1 - \lambda\right]}$$

5. *Exprese la función generalizada $(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\delta''(x)$ como combinación lineal de la delta de Dirac y de sus derivadas.*

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< (1+x^3)^{\frac{1}{3}}\delta''(x) \,|\, \phi(x) > = < \delta''(x) \,|\, \phi(x)(1+x^3)^{\frac{1}{3}} > = (-1)^2 < \delta(x) \,|\, \left[(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\phi(x)\right]'' > = ...$$

$$... = \frac{d^2}{dx^2}\left[(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\phi(x)\right|_{x=0} = ...$$

$$... = \left[\left(2x(1+x^3)^{-\frac{2}{3}} - 2x^4(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\right)\phi(x) + \left(2x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}\right)\phi'(x) + (1+x^3)^{\frac{1}{3}}\phi''(x)\right|_{x=0} = ...$$

$$... = \phi''(0) \; =< \delta(x) \,|\, \phi''(x) >= \; (-1)^2 < \delta''(x) \,|\, \phi(x) >=< \delta''(x) \,|\, \phi(x) >$$

Así, llegamos a la conclusión que:

$$\boxed{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\delta''(x) = \delta''(x)}$$

6. *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + b\sin(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Halle a y b tal que: $f''_{gen}(x) + f(x) = \delta(x) + 2\delta'(x)$

Solución: Hallamos la f''_{gen}

$$f'_{gen}(x) = \begin{cases} -a\sin(x) + b\cos(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} + [(a) - (0)]\,\delta(x-0) = \begin{cases} -a\sin(x) + b\cos(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} + a\delta(x)$$

$$f''_{gen}(x) = \begin{cases} -a\cos(x) - b\sin(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} + [(b) - (0)]\,\delta(x-0) + \; a\delta'(x) = ...$$

$$... = -\begin{cases} a\cos(x) + b\sin(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} + \; b\delta(x) + \; a\delta'(x) = -f(x) + \; b\delta(x) + \; a\delta'(x)$$

Entonces:

$$f''_{gen}(x) + f(x) = \delta(x) + 2\delta'(x) \Longrightarrow (-f(x) + \; b\delta(x) + \; a\delta'(x)) + f(x) = \delta(x) + 2\delta'(x) \Longrightarrow$$

$$b\delta(x) + \; a\delta'(x) = \delta(x) + 2\delta'(x) \Longrightarrow a = 2 \wedge b = 1$$

Así, finalmente tenemos:

$$\boxed{a = 2 \wedge b = 1}$$

7. *Expresar la función generalizada* $F(x) = (\sin(x))\,(\sin(3x)\delta'(x))'$ *como combinación lineal de* $\delta(x)\,,\ \delta'(x)\,,\ \delta''(x)$.

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< (\sin(x))\,(\sin(3x)\delta'(x))' \mid \phi(x) > = < (\sin(3x)\delta'(x))' \mid \sin(x)\phi(x) > = ...$$

$$... = \ (-1) < \sin(3x)\delta'(x) \,|\, (\sin(x)\phi(x))' > = \ - < \delta'(x) \mid \sin(3x)\,[\cos(x)\phi(x) + \sin(x)\phi(x)] > = ...$$

$$... = -(-1) < \delta(x) \mid \ [\sin(3x)\cos(x)\phi(x) + \sin(3x)\sin(x)\phi(x)]' > ... =$$

$$... = [\sin(3x)\cos(x)\phi(x) + \sin(3x)\sin(x)\phi(x)\big|_{x=0}^{'} = ...$$

$$... = [3\cos(3x)\cos(x) - \sin(3x)\sin(x)]\,\phi(x)|_{x=0} + [2\sin(3x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos(3x)]\,\phi'(x)|_{x=0} + ...$$

$$... + [\sin(x)\sin(3x)]\,\phi''(x)|_{x=0} = 3\phi(0) \ = < \delta(x) \,|\, 3\phi(x) > = < 3\delta(x) \,|\, \phi(x) >$$

Así, podemos concluir que:

$$\boxed{F(x) = 3\delta(x)}$$

8. *Halle las constantes* $a\,,\ b\,,\ c \in \mathbb{R}$ *tales que cumpla la igualdad:*

$$\cot(x)\delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \ a\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ b\delta'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ c\delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< \cot(x)\delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) > = < \delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \cot(x)\phi(x) > = \ (-1)^2 < \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid [\cot(x)\phi(x)]'' > = ...$$

$$... = \frac{d^2}{dx^2}\bigg|_{x=\frac{pi}{4}} [\cot(x)\phi(x)] = \big(2\csc^2(x)\cot(x)\phi(x) - 2\csc^2(x)\phi'(x) + \cot(x)\phi''(x)\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = ...$$

$$... = 4\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \phi''\left(\frac{\pi}{4}\right) = ...$$

$$... = < \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid 4\phi(x) > - < \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid 4\phi'(x) > + < \delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi''(x) >= ...$$

$$... = < 4\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) > -(-1) < 4\delta'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) > +(-1)^2 < \delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) >= ...$$

$$... = < 4\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\delta'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) >$$

Tenemos que:

$$< \cot(x)\delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) > = < 4\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\delta'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid \phi(x) >$$

Finalmente, podemos concluir que:

$$\boxed{\cot(x)\delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4\delta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\delta'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \delta''\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

9. *Muestre que* $(1 + \cos(x))\delta''(x - \pi) = \delta(x - \pi)$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< (1+\cos(x))\delta''(x-\pi) \mid \phi(x) > = < \delta''(x-\pi) \mid (1+\cos(x))\phi(x) > = < \delta(x-\pi) \mid [(1 + \cos(x))\phi(x)]'' > = ...$$

$$... = \frac{d^2}{dx^2}\bigg|_{x=\pi} ((1 + \cos(x))\phi(x)) = ((1 + \cos(x))\phi''(x) - 2\sin(x)\phi'(x) - \cos(x)\phi(x)\big|_{x=\pi} = \phi(\pi) = ...$$

$$... = \phi(\pi) =< \delta(x-\pi)\,|\,\phi(x) >$$

Entonces, tenemos que:

$$< (1+\cos(x))\delta''(x-\pi)\,|\,\phi(x) > = < \delta(x-\pi)\,|\,\phi(x) >$$

Finalmente, podemos concluir que:

$$\boxed{(1+\cos(x))\delta''(x-\pi) = \delta(x-\pi)}$$

10. *Exprese* $\sqrt{1+x}\,\delta''(x)$ *en la forma* $C_0\delta(x)+C_1\delta'(x)+C_2\delta''(x)$ *en el intervalo* $-1 \leq x < \infty$.

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< \sqrt{1+x}\,\delta''(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta''(x)\,|\,\sqrt{1+x}\,\phi(x) > = \ (-1)^2 < \delta(x)\,|\,\left[\sqrt{1+x}\,\phi(x)\right]'' >= ...$$

$$... = < \delta(x)\,|-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} + (1+x)^{-\frac{1}{2}}\phi'(x) + \left(\sqrt{1+x}\right)\phi''(x) >= -\frac{1}{4}\phi(0)+\phi'(0)+\phi''(0) = ...$$

$$... =< \delta(x)\,|-\frac{1}{4}\phi(x)+\phi'(x)+\phi''(x) > = < -\frac{1}{4}\delta(x)\,|\,\phi(x) > \ + \ < \delta(x)\,|\,\phi'(x) > \ + \ < \delta(x)\,|\,\phi''(x) > = ...$$

$$... = < -\frac{1}{4}\delta(x)\,|\,\phi(x) > \ - \ < \delta'(x)\,|\,\phi(x) > \ + \ < \delta''(x)\,|\,\phi(x) > = < -\frac{1}{4}\delta(x)-\delta(x)+\delta''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Por otro lado, tenemos que:

$$< \sqrt{1+x}\,\delta''(x)\,|\,\phi(x) > = < -\frac{1}{4}\delta(x) \ - \ \delta(x) \ + \ \delta''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Podemos concluir que:

$$\boxed{\sqrt{1+x}\,\delta''(x) = -\frac{1}{4}\delta(x) \ - \ \delta(x) \ + \ \delta''(x)}$$

11. *Halle*

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(\omega x)dx$$

Solución: Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x < 0 \wedge x > \frac{\pi}{2} \end{cases} = \left[H(x) - H\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\cos(x)$$

Si derivamos generalizadamente dos veces la función continua a trozos $f(x)$ obtenemos que:

$$f'_{gen}(x) = \begin{cases} -\sin(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & x < 0 \wedge x > \frac{\pi}{2} \end{cases} + (1-0)\delta(x)$$

$$f''_{gen}(x) = \begin{cases} -\cos(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & x < 0 \wedge x > \frac{\pi}{2} \end{cases} + \delta'(x) + (0-(-1))\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -f(x) + \delta'(x) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''_{gen}(x) = -f(x) + \delta'(x) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Veamos que el valor de la integral $\Gamma(\omega)$ se encuentra definido en el intervalo $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Luego, veamos que podemos escribir $\Gamma(\omega)$ en términos de la función $f(x)$. Así:

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(\omega x)dx = ...$$

$$... = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0} f(x)\cos(\omega x)dx} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(\omega x)dx + \cancelto{0}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx} = ...$$

$$... = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(\omega x)dx$$

Finalmente:

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

Además, podemos ver la integral anterior como la aplicación de la función generalizada $f(x)$ sobre la función de prueba $\cos(\omega x)$. Así, podemos usar la siguiente notación:

$$\Gamma(\omega) = < f(x) \mid \cos(\omega x) >$$

Utilizaremos a nuestro favor la propiedad particular de la función trigonométrica sobre las derivadas:

$$\frac{d^2}{dx^2}[\cos(\omega x)] = -\omega^2\cos(\omega x) \Longrightarrow \cos(\omega x) = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}[\cos(\omega x)] \quad si \quad \omega \neq 0$$

Entonces:

$$< f(x) \mid \cos(\omega x) > = < f(x) \mid -\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}[\cos(\omega x)] > = -\frac{1}{\omega^2} < f''_{gen}(x) \mid \cos(\omega x) > = ...$$

$$... = -\frac{1}{\omega^2} < -f(x) + \delta'(x) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \mid \cos(\omega x) > = ...$$

$$... = -\frac{1}{\omega^2}\left[- < f(x) \mid \cos(\omega x) > + < \delta'(x) \mid \cos(\omega x) > + < \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \mid \cos(\omega x) >\right] = ...$$

$$... = -\frac{1}{\omega^2}\left[-\Gamma(\omega) + \omega < \delta(x) \mid \sin(\omega x) > + \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\right] = -\frac{1}{\omega^2}\left[-\Gamma(\omega) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\right] = \frac{\Gamma(\omega)}{\omega^2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2}$$

Luego:

$$\Gamma(\omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{\omega^2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2} \Longrightarrow \Gamma(\omega) - \frac{\Gamma(\omega)}{\omega^2} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2} \Longrightarrow \left[\omega^2 - 1\right]\Gamma(\omega) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1 - \omega^2} \quad si \quad \omega \neq 1$$

Antes de finalizar necesitamos encontrar el valor de $\Gamma(\omega)$ para los valores de $\omega = 0$ y $\omega = 1$.
Para $\omega = 0$:

$$\Gamma(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(0\cdot x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Para $\omega = 1$:

$$\Gamma(1) = \lim_{\omega\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2} = \lim_{\omega\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{-2\omega} = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{\Gamma(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2} & \omega \neq 0 \wedge \omega \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{4} & \omega = 1 \\ 1 & \omega = 0 \end{cases}}$$

12. *Probar que si $f(t)$ es una función continua en el punto $t = a$ entonces:*

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< f(t)\,\delta(t-a)\,|\,\phi(t) > = < \delta(t-a)\,|\,\phi(t)\,f(t) > = \phi(a)\,f(a) = f(a) < \delta(t-a)\,|\,\phi(t) > ...$$
$$... = < f(a)\delta(t-a)\,|\,\phi(t) >$$

Luego, llegamos a la igualdad siguiente:

$$< f(t)\,\delta(t-a)\,|\,\phi(t) > = < f(a)\,\delta(t-a)\,|\,\phi(t) >$$

Finalmente, podemos concluir que:

$$\boxed{f(t)\,\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)}$$

13. *Muestre que* $(x^2+1)\ \delta'(x) = \delta'(x)$ *en el espacio de funciones de prueba* $C^{\infty}(\mathbb{R})$

Solución: Para una función de prueba ϕ tenemos:

$$< \left(x^2+1\right)\ \delta'(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta'(x)\,|\ \left(x^2+1\right)\phi(x) > = \ (-1) < \delta(x)\,|\ \left[\left(x^2+1\right)\ \phi(x)\right]' > = ...$$

$$... = - < \delta(x)\,|\,2x\,\phi(x) + \left(x^2+1\right)\phi'(x) > = (-1)\left[(2)(0)\,\phi(0) + \left(0^2+1\right)\phi'(0)\right] = -\phi'(0) = ...$$
$$... = (-1) < \delta(x)\,|\,\phi'(x) > = < \delta'(x)\,|\,\phi(x) >$$

Luego, tenemos que:

$$< \left(x^2+1\right)\ \delta'(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta'(x)\,|\,\phi(x) >$$

Así, se puede concluir que:

$$\boxed{(x^2+1)\ \delta'(x)\ =\ \delta'(x)}$$

14. *Exprese la función generalizada* $\sqrt{1-x^2}\,\delta'''(x)$ *como combinación lineal de* $\delta(x)$ *y sus derivadas*

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos:

$$< \sqrt{1-x^2}\,\delta'''(x)\,|\,\phi(x) > = < \delta'''(x)\,|\,\sqrt{1-x^2}\,\phi(x) > = (-1)^3 < \delta(x)\,|\ \left(\sqrt{1-x^2}\,\phi(x)\right)''' > = ...$$

$$... = -\left(\sqrt{1-x^2}\,\phi(x)\right)'''|_{x=0}$$

Tenemos que hallar la tercera derivada de la expresión anterior y evaluarla en el punto $x=0$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,\phi(x)\right)''' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)'''\phi(x) + 3\left(\sqrt{1-x^2}\right)''\phi'(x) + 3\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\phi''(x) + \left(\sqrt{1-x^2}\right)\phi'''(x)$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'' = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)''' = \left(\frac{-(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right)' = \frac{A+B}{C}$$

$$A = \left[-\left(\sqrt{1-x^2}\right)' - \left\{-\left(\sqrt{1-x^2}\right)' + (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)''\right\}\right]\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$B = \left\{-(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right\}\left\{2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right\}$$

$$C = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^4$$

Evaluando todas las expresiones para $x = 0$ tenemos que:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)|_{x=0} = 1$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\Big|_{x=0} = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)''\Big|_{x=0} = \frac{-(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\Bigg|_{x=0} = \frac{-1}{\sqrt{1-0^2}} = -1$$

$$A|_{x=0} = \left[-\left(\sqrt{1-x^2}\right)' - \left\{-\left(\sqrt{1-x^2}\right)' + (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)''\right\}\right]\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\Big|_{x=0} = [0 - \{0+0\}]\,(1) = 0$$

$$B|_{x=0} = \left\{-(\sqrt{1-x^2}) - (-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right\}\left\{2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right\}\Big|_{x=0} = \{-1+0\}\{0\} = 0$$

$$C|_{x=0} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^4\Big|_{x=0} = 1$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'''\Big|_{x=0} = 0$$

Luego, sustituyendo los valores hallados tenemos:

$$... = -\left(\sqrt{1-x^2}\,\phi(x)\right)'''|_{x=0} = -\left((0)\phi(0) + 3(-1)\phi'(0) + 3(0)\phi''(0) + (1)\phi'''(0)\right) = 3\phi'(0) - \phi'''(0)$$

Así, recordando el problema inicial y usando la definición de la Delta de Dirac:

$$3\phi'(0) - \phi'''(0) = < \delta(x)\,|\,3\phi'(x) > + < \delta(x)\,|\,-\phi'''(x) > = -3 < \delta'(x)\,|\,\phi(x) > + < \delta'''(x)\,|\,\phi(x) > = ...$$
$$... = < -3\delta'(x) + \delta'''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Finalmente, obtenemos la siguiente igualdad:

$$< \sqrt{1-x^2}\,\delta'''(x)\,|\,\phi(x) > = < -3\delta'(x) + \delta'''(x)\,|\,\phi(x) >$$

Puede concluirse que:

$$\boxed{\sqrt{1-x^2}\,\delta'''(x) = -3\delta'(x) + \delta'''(x)}$$

15. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & -2 < x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq -2 \wedge x > 1 \end{cases}$$

(a) *Halle f'_{gen} y f''_{gen}*

(b) *Calcule:*

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)dx \quad a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Solución: Vease que la función f es continua en todo su dominio. Por ende, la derivada generalizada de f'_{gen} es igual a la derivada clásica de f'_{cla}.

$$f'_{gen}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -2 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x < -2 \wedge x > 1 \end{cases}$$

Luego, si derivamos de forma generalizada de nuevo, encontramos que existen tres puntos de discontinuidad finitas en los puntos $x = -2$, $x = 0 \wedge x = 1$. Así:

$$f''_{gen}(x) = \frac{1}{2}\delta(x+2) - \frac{3}{2}\delta(x) + \delta(x-1)$$

Por otra parte, la definición de la integral $I(a)$ puede pensarse como la actuación de una función de prueba $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,/\, \phi(x) = \sin(ax)$ sobre la función $f(x) \in C^1_0(\mathbb{R})$. Así, puede decirse que:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)dx = < f(x) \,|\, \sin(ax) >$$

La función $\phi(x) = \sin(ax)$ podemos expresarla en términos de su segunda derivada:

$$\phi(x) = \sin(ax) \to \phi''(x) = -a^2\sin(ax) = -a^2\phi(x)$$
$$\phi(x) = -\frac{1}{a^2}\phi''(x)$$

Sustituyendo en la expresión de la integral tenemos:

$$I(a) = < f(x) \,|\, \sin(ax) > = < f(x) \,|\, -\frac{1}{a^2}(\sin(ax))'' >$$

Luego, usando propiedades de las operaciones de funciones generalizadas tenemos que:

$$I(a) = < f(x) \,|\, -\frac{1}{a^2}(\sin(ax))'' > = \, (-1)^2 < f''_{gen}(x) \,|\, -\frac{1}{a^2}\sin(ax) > =$$

Sustituyendo la expresión de $f''_{gen}(x)$ tenemos:

$$I(a) = < f''_{gen}(x) \,|\, -\frac{1}{a^2}\sin(ax) > = < \frac{1}{2}\delta(x+2) - \frac{3}{2}\delta(x) + \delta(x-1) \,|\, -\frac{1}{a^2}\sin(ax) >$$

Usando las propiedades de la delta de Dirac:

$$I(a) = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2} < \delta(x+2) \mid \sin(ax) > -\frac{3}{2} < \delta(x) \mid \sin(ax) > + < \delta(x-1) \mid \sin(ax) >\right]$$

$$I(a) = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\sin(-2a) + \sin(a)\right] = \frac{\frac{1}{2}\sin(2a) - \sin(a)}{a^2}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{I(a) = \frac{\frac{1}{2}\sin(2a) - \sin(a)}{a^2} \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

16. *Sea* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Hallar:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\sin(\omega x)dx$$

Solución: Se define una función F que no es más que la extensión en todo $\mathbb{R}$ de la función f. Es decir:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad F(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \wedge x > 2 \end{cases}$$

Veamos que la función $F \in C(\mathbb{R})$. Por ende, su derivada generalizada corresponde a su derivada clásica. Así:

$$F'_{gen}(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \wedge x > 2 \end{cases}$$

Luego, la función F'_{gen} posee tres discontinuidades finitas en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Por lo tanto, su derivada generalizada es:

$$F''_{gen}(x) = \delta(x) - 2\delta(x-1) + \delta(x-2)$$

Se realizó todo este trabajo para la función F ya que queremos aprovechar las derivadas cíclicas que posee la función sin. Por eso, la función g puede ser escrita en términos de F:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\sin(\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(\omega x)dx$$

Vease que F se anula fuera del dominio de integración, es decir, $sop(F) = [0,2]$. Por ende, expresar g en función de F es completamente correcto. Más aún, podemos pensar que la función $\theta \in C^\infty(R)\,/\,\phi(x) = \sin(\omega x)$ está actuando sobre la función F. Así, podemos escribir:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(\omega x) = \frac{2}{\pi}\, < F(x)\,|\,\sin(\omega x) >$$

Luego, podemos aprovechar las derivadas cíclicas de la función sin:

$$\phi(x) = \sin(\omega x) \to \phi''(x) = -\omega^2\sin(\omega x) = -\omega^2\phi(x) \to \phi(x) = -\frac{1}{\omega^2}\phi''(x)$$

Así, sustituyendo en la función g:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} < F(x)\,|\,\phi(x) >= \frac{2}{\pi}\, < F(x)\,|\, -\frac{1}{\omega^2}\phi''(x) >= \, -(-1)^2\frac{2}{\pi\omega^2} < F''_{gen}(x)\,|\,\phi(x) >$$

Luego, sustituyendo la expresión de F''_{gen}:

$$g(\omega) = -\frac{2}{\pi\omega^2}\, < \delta(x) - 2\delta(x-1) + \delta(x-2)\,|\,\phi(x) >$$

$$g(\omega) = -\frac{2}{\pi\omega^2}\,[< \delta(x)\,|\,\phi(x) > -2 < \delta(x-1)\,|\,\phi(x) > + < \delta(x-2)\,|\,\phi(x) >]$$

$$g(\omega) = -\frac{2}{\pi\omega^2}\,[\phi(0) - 2\phi(1) + \phi(2)] = -\frac{2}{\pi\omega^2}\,[-2\sin(\omega) + \sin(2\omega)]$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\omega^2}\left[2\sin(\omega) - \sin(2\omega)\right] & \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}}$$

17. *Muestre que la distribución*

$$f(x) = \delta(x) - \delta'(x) + \frac{1}{2}\delta''(x)$$

satisface la ecuación generalizada $x^2 f(x) = \delta(x)$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos el siguiente desarrollo:

$$< x^2 f(x) \,|\, \phi(x) > = < x^2 \left(\delta(x) - \delta'(x) + \frac{1}{2}\delta''(x)\right) \,|\, \phi(x) > = < \delta(x) - \delta'(x) + \frac{1}{2}\delta''(x) \,|\, x^2\phi(x) > = ...$$

$$... = < \delta(x) \,|x^2\phi(x) > - < \delta'(x) \,|\, x^2\phi(x) > + \frac{1}{2} < \delta''(x) \,|\, x^2\phi(x) > = ...$$

$$... = \; 0 + < \delta(x) \,|\, \left(x^2\phi(x)]\right)' > + \frac{1}{2} < \delta(x) \,|\, \left(x^2\phi(x)\right)'' > = ...$$

$$... = < \delta(x) \,|\, 2x\phi(x) + x^2\phi'(x) > + \frac{1}{2} < \delta(x) \,|\, 2\phi(x) + 2x\phi'(x) + 2x\phi'(x) + x^2\phi''(x) > = 0 + \frac{1}{2}\left(2\phi(0)\right) = \phi(0) = ..$$

$$... = \phi(0) = < \delta(x) \,|\phi(x) >$$

Luego, podemos concluir que:

$$< x^2 f(x) \,|\, \phi(x) > = < \delta(x) \,|\, \phi(x) >$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{x^2 f(x) = \delta(x)}$$

18. *Calcule* $e^{ax}\delta'(x-b)$

Solución: Para cualquier función de prueba ϕ tenemos que:

$$< e^{ax}\delta'(x-b) \,|\, \phi(x) > = < \delta'(x-b) \,|\, e^{ax}\phi(x) > = \; - < \delta(x-b) \,|\, \left(e^{ax}\phi(x)\right)' > = ...$$

$$... = - < \delta(x-b)\,|\, ae^{ax}\phi(x) + e^{ax}\phi'(x) > = \, -\left(ae^{ab}\phi(b) + e^{ab}\phi'(b)\right) = -e^{ab}\left(a\phi(b) + \phi'(b)\right) = ...$$

$$... = \, -e^{ab} < \delta(x-b)\,|\, a\phi(x) + \phi'(x) > = \, -e^{ab}\left[a < \delta(x-b)\,|\,\phi(x) > \, + \, < \delta(x-b)\,|\,\phi'(x) > \right] \, = ...$$

$$... = \, -e^{ab}\left[a < \delta(x-b)\,|\,\phi(x) > \, - \, < \delta'(x-b)\,|\,\phi(x) > \right] = \, -e^{ab}\left[< a\delta(x-b) - \delta'(x-b)\,|\,\phi(x) > \right] = ...$$

$$... = < e^{ab}\left(\delta'(x-b) - a\delta(x-b)\right)\,|\,\phi(x) >$$

Luego, podemos concluir que:

$$< e^{ax}\delta'(x-b)\,|\,\phi(x) > = < e^{ab}\left(\delta'(x-b) - a\delta(x-b)\right)\,|\,\phi(x) >$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\boxed{e^{ax}\delta'(x-b) = e^{ab}\left[\delta'(x-b) - a\delta(x-b)\right]}$$

3 Convolución

19. *Sea $\lambda > 0$. Halle en forma explícita una función causal $u(t)$ tal que:*

$$u(t) = [tH(t)] * \left[H(t)e^{\lambda t}\right]$$

Solución: Llamando a

$$F(t) = tH(t)\,,\, G(t) = e^{\lambda t}H(t)$$

tenemos la convolución de dos funciones causales, por lo tanto, su convolución será una función causal (en este caso $u(t)$)

Nota: Las funciones $f(t) = t$ y $g(t) = e^{\lambda t}$ se "convierten" en funciones causales cuando se les multiplica por la función de Heaviside

Ahora, tenemos dos opciones: Hacer uso de la definición de convolución o propiedades de la convolución como función generalizada. Iremos por la segunda alternativa.

Sabiendo que, para una función causal $h(t) = f(t) * g(t)$ operando sobre el espacio de funciones de prueba $\mathcal{A}$ (funciones anticausales) podemos demostrar que:

$$(u(t))'_{gen} = [f(t) * g(t)]'_{gen} = [f(t)]'_{gen} * g(t) = f(t) * [g(t)]'_{gen}$$

Luego, en nuestro caso, hallaremos lo siguiente:

$$(u(t))''_{gen} = [F(t)]''_{gen} * G(t) = F(t) * [G(t)]''_{gen}$$

Operaremos por separado. Para la función $F(t)$ sabemos que se trata de una función continua a trozos definida de la siguiente manera:

$$F(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow F'_{clas}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow F''_{clas}(t) = 0 \quad \forall\, t$$

Aplicando la definición de la derivada generalizada de funciones suaves a trozos tenemos:

$$[F(t)]'_{gen} = H(t) + (0)(\delta(t)) = 1 \Longrightarrow [F(t)]'_{gen} = H(t)$$

$$[F(t)]''_{gen} = 0 + (1)(\delta(t)) = \delta(t) \Longrightarrow [F(t)]''_{gen} = \delta(t)$$

Luego:

$$[F(t)]''_{gen} = [tH(t)]''_{gen} = \delta(t)$$

De la misma procederemos con la función $G(t)$.

$$G(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow G'_{clas}(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow G''_{clas}(t) = \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$[G(t)]'_{gen} = \lambda e^{\lambda t} H(t) + (1)(\delta(t)) \Longrightarrow [G(t)]'_{gen} = \lambda e^{\lambda t} H(t) + \delta(t)$$

$$[G(t)]''_{gen} = \lambda^2 e^{\lambda t} H(t) + (\lambda)(\delta(t)) + (\delta(t))' \Longrightarrow [G(t)]''_{gen} = \lambda^2 e^{\lambda t} H(t) + \lambda\delta(t) + \delta'(t)$$

Así:

$$[G(t)]''_{gen} = [e^{\lambda t} H(t)]''_{gen} = \lambda^2 e^{\lambda t} H(t) + \lambda\delta(t) + \delta'(t)$$

Entonces, retomando la expresión de $(u(t))''_{gen}$ y aplicando identidades notables de la convolución de una función continua a trozos y causal (en nuestro caso, $f(t)$ y $g(t)$) con la delta de Dirac ($\delta * f = f * \delta = f$), tenemos:

$$[F(t)]''_{gen} * G(t) = \delta(t) * (e^{\lambda t} H(t)) = e^{\lambda t} H(t)$$

$$F(t) * [G(t)]''_{gen} = (tH(t)) * (\lambda^2 e^{\lambda t} H(t) + \lambda\delta(t) + \delta'(t) = ...$$

$$... = \lambda^2 (tH(t)) * (e^{\lambda t} H(t)) + \lambda(tH(t)) * (\delta(t)) + (tH(t)) * (\delta'(t)) = \lambda^2 u(t) + \lambda(tH(t)) + (tH(t))'_{gen} * (\delta(t)) = ...$$

$$... = \lambda^2 u(t) + \lambda(tH(t)) + (H(t)) * (\delta(t)) = \lambda^2 u(t) + \lambda(tH(t)) + H(t) = \lambda^2 u(t) + (\lambda t + 1)H(t)$$

Entonces, tenemos de la igualdad:

$$e^{\lambda t} H(t) = \lambda^2 u(t) + (\lambda t + 1)H(t) \Longrightarrow e^{\lambda t} H(t) - (\lambda t + 1)H(t) = \lambda^2 u(t)$$

$$(e^{\lambda t} - \lambda t - 1)H(t) = \lambda^2 u(t) \Longrightarrow u(t) = \frac{e^{\lambda t} - \lambda t - 1}{\lambda^2} H(t)$$

Finalmente:

$$\boxed{u(t) = \frac{e^{\lambda t} - \lambda t - 1}{\lambda^2} H(t)}$$

Nota: Pudimos haber aplicado el siguiente resultado para resolver el problema: *Si F y G son dos funciones causales, entonces su convolución existe y también es causal. Además, si $F(t) = H(t-a)f(t)$ y $G(t) = H(t-b)g(t)$ con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas a trozos y $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

$$(F * G)(t) = H(t-(a+b)) \int_b^{t-a} f(t-s)g(s)ds$$

Así, aplicando tenemos:

$$u(t) = (tH(t)) * (H(t)e^{\lambda t}) = H(t) \int_0^t (t-s)e^{\lambda s}ds = H(t)\left[t\int_0^t e^{\lambda s}ds - \int_0^t se^{\lambda s}ds\right] = ...$$

$$... = H(t)\left[t\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda s}\right|_0^t - \left(\frac{1}{\lambda}s - \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{\lambda s}\Bigg|_0^t\right] = H(t)\left[t\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t}-1\right) - \left[\left(\frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{\lambda t} - \left(0 - \frac{1}{\lambda^2}\right)1\right]\right] = ...$$

$$... = H(t)\left[\frac{te^{\lambda t} - t}{\lambda} - \left(\frac{\lambda te^{\lambda t} - e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2}\right)\right] = H(t)\left[\frac{\lambda te^{\lambda t} - \lambda t - \lambda te^{\lambda t} + e^{\lambda t} - 1}{\lambda^2}\right] = ...$$

$$... = H(t)\left[\frac{e^{\lambda t} - \lambda t - 1}{\lambda^2}\right]$$

Finalmente:

$$\boxed{u(t) = \frac{e^{\lambda t} - \lambda t - 1}{\lambda^2}H(t)}$$

20. *Halle la convolución de las funciones*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & si \quad x < 0 \wedge x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ -1 & si \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & si \quad x < 0 \wedge 1 < x < 2 \wedge x > 3 \end{cases}$$

Solución: Usaremos la función de Heaviside para escribir de forma "más simple" las funciones $f(x)$, $g(x)$.

$$f(x) = H(x) - H(x+1) \quad g(x) = H(x) - H(x+1) - H(x+2) + H(x+3)$$

Luego, por definición de convolución:

$$u(x) = f(x) * g(x) = [H(x) - H(x+1)] * [H(x) - H(x+1) - H(x+2) + H(x+3)]$$

$$u(x) = H(x)*H(x) - H(x)*H(x+1) - H(x)*H(x+2) + H(x)*H(x+3) - H(x+1)*H(x) + ...$$
$$... + H(x+1)*H(x+1) + H(x+1)*H(x+2) - H(x+1)H(x+3)$$

Para evitar calcular las 8 convoluciones, haremos el cálculo de un caso general:

$$H(x+a)*H(x+b) = H(x-(-a))*H(x-(-b)) = H(x-(-a-b))\int_{-b}^{x-(-a)}(1)(1)ds = ...$$
$$... = H(x+a+b)\int_{-b}^{x+a} ds = H(x+a+b)(x+a-(-b)) = H(x+a+b)(x+a+b)$$

$$H(x+a)*H(x+b) = H(x+a+b)(x+a+b)$$

Así, tenemos:

$$H(x)*H(x) = H(x+0+0)(x+0+0) = H(x)x$$
$$H(x)*H(x+1) = H(x+0+1)(x+0+1) = H(x+1)(x+1)$$
$$H(x)*H(x+2) = H(x+0+2)(x+0+2) = H(x+2)(x+2)$$
$$H(x)*H(x+3) = H(x+0+3)(x+0+3) = H(x+3)(x+3)$$
$$H(x+1)*H(x+1) = H(x+1+1)(x+1+1) = H(x+2)(x+2)$$
$$H(x+1)*H(x+2) = H(x+1+2)(x+1+2) = H(x+3)(x+3)$$
$$H(x+1)*H(x+3) = H(x+1+3)(x+1+3) = H(x+4)(x+4)$$

Entonces:

$$u(x) = xH(x) - (x+1)H(x+1) - (x+2)H(x+2) + (x+3)H(x+3) - (x+1)H(x+1) + (x+2)H(x+2) + ...$$

$$... + (x+3)H(x+3) - (x+4)H(x+4)$$

Finalmente, simplificando:

$$\boxed{u(x) = xH(x) - 2(x+1)H(x+1) + 2(x+3)H(x+3) - (x+4)H(x+4)}$$

Es importante notar que pudimos haber resuelto el ejercicio si aplicasemos las propiedades de la transformada de Laplace.
Sea

$$u(x) = f(x) * g(x)$$

Derivando generalizadamente una vez, sabiendo que:

$$f(x) = H(x) - H(x+1)$$

$$g(x) = H(x) - H(x+1) - H(x+2) + H(x+3)$$

$$u'(x)_{gen} = [f(x) * g(x)]'_{gen} = [f(x)]'_{gen} * g(x) = ...$$
$$... = [H(x) - H(x+1)]'_{gen} * [g(x)] = [\delta(x) - \delta(x+1)] * [g(x)] = g(x) - g(x+1) = ...$$
$$u'(x)_{gen} = [H(x) - H(x+1) - H(x+2) + H(x+3)] - [H(x+1) - H(x+2) - H(x+3) + H(x+4)]$$
$$u'(x)_{gen} = H(x) - 2H(x+1) + 2H(x+3) - H(x+4)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad, donde $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\{u'(x)_{gen}\}(z) = \mathscr{L}\{H(x)\} - 2\mathscr{L}\{H(x+1)\}(z) + 2\mathscr{L}\{H(x+3)\}(z) - \mathscr{L}\{H(x+4)\}(z)$$

$$zF(z) = \frac{1}{z} - 2\frac{e^{z}}{z} + 2\frac{e^{3z}}{z} - \frac{e^{4z}}{z} \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{z^2} - 2\frac{e^{z}}{z^2} + 2\frac{e^{3z}}{z^2} - \frac{e^{4z}}{z^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace y algunas transformadas de tabla:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(z)\}(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\}(x) - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{z}}{z^2}\right\}(x) + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{3z}}{z^2}\right\}(x) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4z}}{z^2}\right\}(x)$$

$$u(x) = \frac{x^{2-1}H(x)}{(2-1)!} - 2\frac{(x+1)^{2-1}H(x+1)}{(2-1)!} + 2\frac{(x+3)^{2-1}H(x+3)}{(2-1)!} - \frac{(x+4)^{2-1}H(x+4)}{(2-1)!}$$

$$u(x) = xH(x) - 2(x+1)H(x+1) + 2(x+3)H(x+3) - (x+4)H(x+4)$$

Finalmente:

$$\boxed{u(x) = xH(x) - 2(x+1)H(x+1) + 2(x+3)H(x+3) - (x+4)H(x+4)}$$

21. Halle una solución causal de la ecuación

$$f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt + \int_0^\infty x^2 e^{-x}\sin(x)dx$$

Solución: Si multiplicamos a la ecuación por la función de Heaviside centrada en $x=0$ tendremos:

$$H(x)f(x) = H(x)\sin(x) + 2H(x)\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt + H(x)\int_0^\infty x^2 e^{-x}\sin(x)dx$$

Notemos que el tercer término tiene una forma "particular". Si la manipulamos correctamente encontraremos que:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\sin(x)dx = \int_{-\infty}^\infty H(x)x^2 e^{-x}\sin(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \left[H(x)x^2\sin(x)\right] e^{(1)(-x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left[H(x)x^2\sin(x)\right] e^{(1)(-x)}dx = \mathscr{L}\{H(x)x^2\sin(x)\}(z=1)$$

Es la transformada de Laplace de $H(x)x^2\sin(x)$ evaluada en $z=1$.

Así:

$$\mathscr{L}\{H(x)x^2\sin(x)\}(z=1) = \mathscr{L}\{x^2(H(x)\sin(x))\}(z=1) = (-1)^2\left.\frac{d^2}{dz^2}\right|_{z=1}[\mathscr{L}\{H(x)\sin(x)\}(z)] = ...$$

$$... = \frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right] = \frac{d}{dz}\bigg|_{z=1}\left[\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right] = -2\left[\frac{(z^2+1)^2-4z^2(z^2+1)}{(z^2+1)^4}\bigg|_{z=1}\right. = -2\left(\frac{4-8}{16}\right) = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\sin(x)dx = \frac{1}{2}$$

El segundo término de nuestra ecuación tiene forma de una convolución muy escondida. De nuevo, si la manipulamos correctamente hallaremos:

$$H(x)\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = H[x-(0+0)]\int_0^{x-0} cos(x-t)f(t)dt$$

Veamos que se trata de una convolución de dos funciones $F(x) = H(x)f(x)$ y $G(x) = H(x)cos(x)$, ambas continuas a trozos

Luego, podemos decir que:

$$H(x)\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = \left[[H(t)f(t)] * [H(t)cos(t)]\right](x)$$

Volviendo a la ecuación inicial tenemos:

$$H(x)f(x) = H(x)\sin(x) + 2\left[[H(t)f(t)] * [H(t)cos(t)]\right] + \frac{1}{2}H(x)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad, donde $H(x)f(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\{H(x)f(x)\}(z) = \mathscr{L}\{H(x)\sin(x)\}(z) + 2\mathscr{L}\{[[H(t)f(t)] * [H(t)cos(t)]]\}(z) + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}H(x)\right\}(z)$$

$$F(z) = \frac{1}{z^2+1} + 2\frac{z}{z^2+1}F(z) + \frac{1}{2z} \Longrightarrow \left(1 - \frac{2z}{z^2+1}\right)F(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{2z}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{(z-1)^2}{z^2+1}\right)F(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{2z} \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z(z-1)^2}$$

$$F(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} H(x)f(x)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(z)\}(x) = \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-1)^2}\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(x) - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}(x)$$

$$H(x)f(x) = \frac{3}{2}\frac{H(x)e^{(1)(x)}x^{(2-1)}}{(2-1)!} + \frac{1}{2}H(x) - \frac{1}{2}H(x)e^{(1)(x)}$$

$$H(x)f(x) = H(x)\left[\frac{3}{2}e^x x + \frac{1}{2} - e^x\right]$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}e^x x + \frac{1}{2} - e^x}$$

22. Sea $\omega > 0$. Halle en forma explícita una función causal $u(t)$ tal que:

$$tH(t) * u(t) = \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)$$

Solución: Procedemos a derivar generalizadamente dos veces a ambos lados de la igualdad:

$$[tH(t) * u(t)]''_{gen} = \left[\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right]''_{gen}$$

Del lado izquierdo podemos manipularlo de tal forma que resulte:

$$[tH(t) * u(t)]''_{gen} = \left[(tH(t))''_{gen} * u(t)\right]$$

Luego, derivando generalizadamente dos veces la función generalizada $tH(t)$:

$$tH(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$[tH(t)]'_{gen} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow [tH(t)]''_{gen} = \delta(t)$$

Así, tenemos:

$$\left[(tH(t))''_{gen} * u(t)\right] = [\delta(t) * u(t)] = u(t) \Longrightarrow [tH(t) * u(t)]''_{gen} = u(t)$$

Solo faltaría hallar la segunda derivada generalizada del lado derecho de la igualdad $\dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)$

$$\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right]'_{gen} = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right]''_{gen} = \begin{cases} \cos(\omega t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Longrightarrow \left[\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right]''_{gen} = \cos(\omega t)H(t)$$

Así, finalmente tenemos que:

$$\boxed{u(t) = \cos(\omega t)H(t)}$$

También pudimos aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, sabiendo que $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\{tH(t) * u(t)\}(z) = \mathscr{L}\left\{\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right\}(z)$$

Notamos que:

$$\mathscr{L}\{tH(t)*u(t)\}(z) = \mathscr{L}\{tH(t)\}(z)\cdot\mathscr{L}\{u(t)\}(z) = -\frac{d}{dz}\left[\mathscr{L}\{H(t)\}(z)\right]\cdot F(z) = -\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\right]\cdot F(z) = \frac{1}{z^2}F(z)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}H(t)\right\}(z) = \frac{1}{\omega^2}\left[\mathscr{L}\left\{H(t)\right\}(z) - \mathscr{L}\left\{\cos(\omega t)H(t)\right\}(z)\right] = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+\omega^2}\right]$$

Así, tenemos:

$$\frac{1}{z^2}F(z) = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+\omega^2}\right] \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{\omega^2}\left[z - \frac{z^3}{z^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{z^3+\omega^2 z - z^3}{z^2+\omega^2}\right] = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

Resulta:

$$F(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$

$$u(t) = \cos(\omega t)H(t)$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\boxed{u(t) = \cos(\omega t)H(t)}$$

23. *Halle $u(t)$ tal que:*

$$u(t) = [(3t-2)H(t)] * [H(t)\sin(t)]$$

Solución: Aplicamos transformada de Laplace bilateral a ambos lados de la igualdad, estableciendo que: $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$

$$\mathscr{L}\{u(t)\}(z) = \mathscr{L}\{[(3t-2)H(t)] * [H(t)\sin(t)]\}(z)$$

Luego, aplicando propiedades de la transformada de Laplace con respecto a la convolución y linealidad:

$$F(z) = \mathscr{L}\{(3t-2)H(t)\}(z) \cdot \mathscr{L}\{H(t)\sin(t)\}(z)$$

$$\mathscr{L}\{(3t-2)H(t)\}(z) = 3\mathscr{L}\{tH(t)\}(z) - 2\mathscr{L}\{H(t)\}(z) = -3\frac{d}{dz}\left[\mathscr{L}\{H(t)\}\right] - 2\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{3}{z^2} - \frac{2}{z} = \frac{3-2z}{z^2}$$

$$\mathscr{L}\{H(t)\sin(t)\}(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

Así, sustituyendo las transformadas de las funciones en cuestión:

$$F(z) = \left[\frac{3-2z}{z^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{z^2+1}\right] = \frac{3-2z}{z^2\left(z^2+1\right)}$$

Usamos el método de fracciones simples con el fin de hallar la transformada inversa de Laplace de una forma más sencilla:

$$\frac{3-2z}{z^2\left(z^2+1\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{Cz+D}{z^2+1} = \frac{z(z^2+1)A + (z^2+1)B + z^2(Cz+D)}{z^2(z^2+1)}$$

$$\Longrightarrow 3 - 2z = (A+C)z^3 + (B+D)z^2 + Az + B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A = -2 \\ B = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = -2 \\ B = 3 \\ C = 2 \\ D = -3 \end{array} \right.$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$F(z) = \frac{-2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{2z-3}{z^2+1} = -2\frac{1}{z} + 3\frac{1}{z^2} + 2\frac{z}{z^2+1} - 3\frac{1}{z^2+1}$$

Finalmente, aplicamos la transforma inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(z)\}(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-2\frac{1}{z} + 3\frac{1}{z^2} + 2\frac{z}{z^2+1} - 3\frac{1}{z^2+1}\right\}(x)$$

$$u(t) = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(x) + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\}(x) + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\}(x) - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2+1}\right\}(x)$$

$$u(t) = -2H(t) + 3tH(t) + 2\cos(t)H(t) - 3\sin(t)H(t)$$

$$\boxed{u(t) = \left[3\left(t - \sin(t)\right) + 2\left(-1 + \cos(t)\right)\right] H(t)}$$

24. *Calcular* $[H(x+1)-H(x-1)]*[H(x+1)-H(x-1)]$

Solución: Apliquemos la propiedad distributiva a las convoluciones para obtener una expresión más simple:

$$[H(x+1)-H(x-1)]*[H(x+1)-H(x-1)] = ...$$
$$... = H(x+1)*H(x+1) - 2H(x+1)*H(x-1) + H(x-1)*H(x-1)$$

Recordando la regla general de la convolución de dos funciones Heaviside:

$$H(x+a)*H(x+b) = H(x-(-a))*H(x-(-b)) = H(x-(-a-b))\int_{-b}^{x-(-a)}(1)(1)ds = ...$$
$$... = H(x+a+b)\int_{-b}^{x+a} ds = H(x+a+b)(x+a-(-b)) = H(x+a+b)(x+a+b)$$
$$H(x+a)*H(x+b) = H(x+a+b)(x+a+b)$$

Así, tenemos:

$$H(x+1)*H(x+1) = H(x+1+1)(x+1+1) = H(x+2)(x+2)$$
$$H(x+1)*H(x-1) = H(x+1-1)(x+1-1) = H(x)x$$
$$H(x-1)*H(x-1) = H(x-1-1)(x-1-1) = H(x-2)(x-2)$$

Luego, tenemos que:

$$\boxed{[H(x+1)-H(x-1)]*[H(x+1)-H(x-1)] = (x+2)H(x+2) - 2xH(x) + (x-2)H(x-2)}$$

25. *Sean:*

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & -2 \le x \le 0 \\ 2-x & 0 < x \le 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Halle $(f(x)*p(x))(t)$, $(f(x)*p(x))'_{gen}(t)$ *y* $\mathscr{L}\left\{(f(x)*p(x))'_{gen}(t)\right\}(z)$

Solución: El primer paso consiste en reescribir las funciones f y g en términos de la función de Heaviside:

$$f(x) = (x+2)\left[H(x+2)-H(x)\right] + (2-x)\left[H(x)-H(x-2)\right]$$

$$p(x) = H(x+1) - H(x-1)$$

En primer lugar, hallaremos $\left(f(x) * p(x)\right)'_{gen}(t)$

$$\left(f(x) * p(x)\right)'_{gen}(t) = \left(f'_{gen}(x) * p(x)\right)(t)$$

Entonces, calculamos f'_{gen}. Veamos que f es una función continua en todo el domino que se encuentra definido, es decir $f \in C(\mathbb{R})$. Por ende, su derivada generalizada corresponde a la derivada clásica $f'_{gen} = f'_{clas}$. Así:

$$f'_{gen}(x) = f'_{clas}(x) = [H(x+2) - H(x)] - [H(x) - H(x-2)] = ...$$

$$... = H(x+2) - H(x) - H(x) + H(x-2) = H(x+2) - 2H(x) + H(x-2)$$

Luego, tenemos que:

$$\left(f(x) * p(x)\right)'_{gen}(t) = [H(x+2) - 2H(x) + H(x-2)] * [H(x+1) - H(x-1)] = ...$$

$$... = H(x+2)*H(x+1) - H(x+2)*H(x-1) - 2H(x)*H(x+1) + 2H(x)*H(x-1) + H(x-2)*H(x+1)...$$

$$... - H(x-2) * H(x-1)$$

Recordando la convolución de funciones Heaviside cualesquiera, calculamos la convolución de las funciones involucradas:

$$H(x+2) * H(x+1) = H(x+2+1)(x+2+1) = H(x+3)(x+3)$$

$$H(x+2) * H(x-1) = H(x+2-1)(x+2-1) = H(x+1)(x+1)$$

$$H(x) * H(x+1) = H(x+0+1)(x+0+1) = H(x+1)(x+1)$$

$$H(x) * H(x-1) = H(x+0-1)(x+0-1) = H(x-1)(x-1)$$

$$H(x-2) * H(x+1) = H(x-2+1)(x-2+1) = H(x-1)(x-1)$$

$$H(x-2) * H(x-1) = H(x-2-1)(x-2-1) = H(x-3)(x-3)$$

Así:

$$\left(f(x) * p(x)\right)'_{gen}(t) = ...$$

$$... = (x+3)H(x+3) - (x+1)H(x+1) - 2(x+1)H(x+1) + 2(x-1)H(x-1) + (x-1)H(x-1) - (x-3)H(x-3) = ...$$

$$... = (x+3)H(x+3) - 3(x+1)H(x+1) + 3(x-1)H(x-1) - (x-3)H(x-3)$$

Finalmente:

$$\boxed{(f(x) * p(x))'_{gen}(t) = (t+3)H(t+3) - 3(t+1)H(t+1) + 3(t-1)H(t-1) - (t-3)H(t-3)}$$

Procederemos en calcular la transformada de Laplace bilateral al anterior resultado:

$$\mathscr{L}\left\{(f(x) * p(x))'_{gen}(t)\right\}(z) = ...$$

$$... = \mathscr{L}\left\{(t+3)H(t+3) - 3(t+1)H(t+1) + 3(t-1)H(t-1) - (t-3)H(t-3)\right\}(z)$$

Véase que las funciones a transformar son del tipo $f(t-a) = (t-a)H(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$. Por ende, podemos aplicar propiedades de la tranformada de Laplace bilateral:

$$\mathscr{L}\left\{f(t-a)\right\}(z) = e^{-az}\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(z)$$

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{tH(t)\right\}(z) = -\frac{d}{dz}\mathscr{L}\left\{H(t)\right\}(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\mathscr{L}\left\{(t-a)H(t-a)\right\}(z) = \frac{e^{-az}}{z^2}$$

Luego, aplicando este resultado para todas las funciones anteriores:

$$\mathscr{L}\left\{(t+3)H(t+3)\right\}(z) = \frac{e^{3z}}{z^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{(t+1)H(t+1)\right\}(z) = \frac{e^{z}}{z^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{(t-1)H(t-1)\right\}(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{(t-3)H(t-3)\right\}(z) = \frac{e^{-3z}}{z^2}$$

Luego, tenemos que:

$$\boxed{\mathscr{L}\left\{(f(x) * p(x))'_{gen}(t)\right\}(z) = \frac{e^{3z}}{z^2} - \frac{3e^{z}}{z^2} + \frac{3e^{-z}}{z^2} - \frac{e^{-3z}}{z^2}}$$

Usaremos el resultado anterior para hallar $(f(x) * p(x))(t)$, empleando propiedades de la transformada de Laplace bilateral con respecto a la operación de convolución:

$$\mathscr{L}\left\{(f(x) * p(x))'_{gen}(t)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{\left(f'_{gen}(x) * p(x)\right)(t)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{f'_{gen}(x)\right\}(z) \cdot \mathscr{L}\left\{p(x)\right\}(z) = ...$$

$$... = [z\mathscr{L}\{f(x)\}(z)]\cdot\mathscr{L}\{p(x)\}(z) = z\cdot[\mathscr{L}\{f(x)\}(z)\cdot\mathscr{L}\{p(x)\}(z)] = z\cdot[\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z)]$$

En resumen, tenemos que:

$$\mathscr{L}\left\{(f(x)*p(x))'_{gen}(t)\right\}(z) = z\cdot[\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z)]$$

Luego, podemos despejar $\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z)$:

$$\mathscr{L}\left\{(f(x)*p(x))'_{gen}(t)\right\}(z) = z\cdot[\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z)]$$

$$\frac{e^{3z}}{z^2}-\frac{3e^{z}}{z^2}+\frac{3e^{-z}}{z^2}-\frac{e^{-3z}}{z^2} = z\cdot[\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z)]$$

$$\mathscr{L}\{(f(x)*p(x))(t)\}(z) = \frac{e^{3z}}{z^3}-\frac{3e^{z}}{z^3}+\frac{3e^{-z}}{z^3}-\frac{e^{-3z}}{z^3}$$

Ahora, solo basta con hallar la transformada inversa de Laplace bilateral del anterior resultado y tendremos la convolución que se nos pide. Afortunadamente, las funciones en cuestión cuentan con una antitransformada de Laplace bilateral de tabla. Así, nos queda que:

$$\boxed{(f(x)*p(x))(t) = \frac{(t+3)^2}{2}H(t+3)-\frac{3(t+1)^2}{2}H(t+1)+\frac{3(t-1)^2}{2}H(t-1)-\frac{(t-3)^2}{2}H(t-3)}$$

4 Transformada de Laplace

26. *Usando la transformada de Laplace, calcule el valor de la integral:*

$$I = \int_0^\infty xe^{-2x}\cos(x)dx$$

Solución: Recordemos la definición de la transformada de Laplace bilateral:

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt \quad z\in\mathbb{C}$$

Luego, tenemos que hacer parecer a I a la definición de la transformada de Laplace bilateral. Para ello, usamos la función de Heaviside:

$$I = \int_0^\infty xe^{-2x}\cos(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)xe^{-2x}\cos(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}[xH(x)\cos(x)]\,e^{-2x}dx$$

Véase que si nombramos a $f(x) = xH(x)\cos(x)$ y hacemos $z=2$ y sustituimos en la definición de la transformada de Laplace bilateral tendremos:

$$F(z=2) = \int_{-\infty}^{\infty} xH(x)\cos(x)e^{-2x}dx \Longrightarrow F(z=2) = I$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$I = \mathscr{L}\{xH(x)\cos(x)\}(2)$$

Luego, aplicando propiedades de la transformada de Laplace tenemos:

$$I = \mathscr{L}\{xH(x)\cos(x)\}(2) = (-1)^1 \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=2} [\mathscr{L}\{H(x)\cos(x)\}] = -\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=2}\left[\frac{z}{z^2+1^2}\right] = -\left.\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}\right|_{z=2}$$

$$I = \frac{3}{25}$$

Finalmente, concluimos que:

$$\boxed{\int_0^{\infty} xe^{-2x}\cos(x)dx = \frac{3}{25}}$$

27. *Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \cos(2x)H(x-3)$

(b) $g(x) = \begin{cases} x+a & -a < x < 0 \\ a-x & 0 < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

Solución: Para el caso (a) nos valemos de la siguiente identidad:

$$\cos(x) = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2}$$

Así, tenemos:

$$\cos(2x)H(x-3) = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2}H(x-3) = \frac{1}{2}\left[e^{2ix}H(x-3) - e^{-2ix}H(x-3)\right]$$

Luego, hallando la transformada de Laplace (bilateral) de f y aplicando propiedades de la misma:

$$\mathscr{L}\{\cos(2x)H(x-3)\}(z)=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{2ix}H(x-3)-e^{-2ix}H(x-3)\right]\right\}(z)=...$$

$$...=\frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\left\{e^{2ix}H(x-3)\right\}(z)-\mathscr{L}\left\{e^{-2ix}H(x-3)\right\}(z)\right]=...$$

$$...=\frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\left\{H(x-3)\right\}(z-2i)-\mathscr{L}\left\{H(x-3)\right\}(z+2i)\right]=...$$

$$...=\frac{1}{2}\left[e^{-3(z-2i)}\mathscr{L}\left\{H(x)\right\}(z-2i)-e^{-3(z+2i)}\mathscr{L}\left\{H(x)\right\}(z+2i)\right]=...$$

$$...=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-3(z-2i)}}{z-2i}+\frac{e^{-3(z+2i)}}{z+2i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(z+2i)e^{-3(z-2i)}+(z-2i)e^{-3(z+2i)}}{z^2+4}\right)=...$$

$$...=\frac{1}{2}\left(\frac{z\left(e^{-3(z-2i)}+e^{-3(z+2i)}\right)+2i\left(e^{-3(z-2i)}-e^{-3(z+2i)}\right)}{z^2+4}\right)=...$$

$$...=\frac{e^{-3z}}{2(z^2+4)}\left[z\left(e^{6i}+e^{-6i}\right)+2i\left(e^{6i}-e^{-6i}\right)\right]=...$$

$$...=\frac{e^{-3z}}{2(z^2+4)}\left[z\left(\cos(6)+i\sin(6)+\cos(6)-i\sin(6)\right)+2i\left(\cos(6)+i\sin(6)-\cos(6)+i\sin(6)\right)\right]=...$$

$$...=\frac{e^{-3z}}{2(z^2+4)}\left[2z\cos(6)-4\sin(6)\right]=\frac{e^{-3z}}{(z^2+4)}\left[z\cos(6)-2\sin(6)\right]$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\cos(2x)H(x-3)\}(z)=\frac{e^{-3z}}{(z^2+4)}\left[z\cos(6)-2\sin(6)\right]}$$

Para el caso (b) usaremos la función de Heaviside para reescribir a la funcion g:

$$g(x)=\begin{cases} x+a & -a<x<0 \\ a-x & 0<x<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}=(x+a)\left[H(x+a)-H(x)\right]+(a-x)\left[H(x)-H(x-a)\right]=...$$

$$...=x\left[H(x+a)-H(x)-H(x)+H(x-a)\right]+a\left[H(x+a)-H(x)+H(x)-H(x-a)\right]=...$$

$$...=x\left[H(x+a)-2H(x)+H(x-a)\right]+a\left[H(x+a)-H(x-a)\right]$$

$$g(x) = x\left[H(x+a) - 2H(x) + H(x-a)\right] + a\left[H(x+a) - H(x-a)\right]$$

Así, usando propiedades de linealidad de la transformada de Laplace bilateral tenemos que:

$$\mathscr{L}\{g(x)\}(z) = \mathscr{L}\{x\left[H(x+a) - 2H(x) + H(x-a)\right] + a\left[H(x+a) - H(x-a)\right]\}(z) = ...$$

$$... = \mathscr{L}\{x\left[H(x+a) - 2H(x) + H(x-a)\right]\}(z) + a\mathscr{L}\{\left[H(x+a) - H(x-a)\right]\}(z) = ...$$

$$... = -\frac{d}{dz}\left[\mathscr{L}\{H(x+a) - 2H(x) + H(x-a)\}(z)\right] + a\left[\mathscr{L}\{H(x+a)\}(z) - \mathscr{L}\{H(x-a)\}(z)\right] = ...$$

$$... = -\frac{d}{dz}\left[\mathscr{L}\{H(x+a)\}(z) - 2\mathscr{L}\{H(x)\}(z) + \mathscr{L}\{H(x-a)\}(z)\right] + a\left[\mathscr{L}\{H(x+a)\}(z) - \mathscr{L}\{H(x-a)\}(z)\right]$$

Luego, aplicando propiedades de traslación de la transformada de Laplace bilateral:

$$\mathscr{L}\{H(x+a)\}(z) = e^{az}\mathscr{L}\{H(x)\}(z) = \frac{e^{az}}{z}$$

$$\mathscr{L}\{H(x-a)\}(z) = e^{-az}\mathscr{L}\{H(x)\}(z) = \frac{e^{-az}}{z}$$

Por lo tanto, sustituyendo:

$$\mathscr{L}\{g(x)\}(z) = -\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z}\right] + a\left[\frac{e^{az} - e^{-az}}{z}\right] = ...$$

$$... = -\left[\frac{az(e^{az} - e^{-az}) - (e^{az} - 2 + e^{-az})}{z^2}\right] + a\left[\frac{e^{az} - e^{-az}}{z}\right] = ...$$

$$... = \frac{-aze^{az} + aze^{-az} + e^{az} - 2 + e^{-az} + aze^{az} - aze^{-az}}{z^2} = \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2}$$

Finalmente, concluimos que:

$$\boxed{\mathscr{L}\{g(x)\}(z) = \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2}}$$

28. *Usando el método de los residuos, halle la distribución causal $f(t)$ cuya transformada de Laplace es:*

$$F(z) = \frac{z^3 + 6z^2 + 8z}{(z+3)^2}$$

Solución: Manipulando algébraicamente la función $F(z)$ tenemos:

$$F(z) = \frac{z^3 + 6z^2 + 8z}{(z+3)^2} = \frac{z(z^2 + 6z + 8)}{(z+3)^2} = \frac{z\left[(z+3)^2 - 1\right]}{(z+3)^2} = z\left[1 - \frac{1}{(z+3)^2}\right] = z - \frac{z}{(z+3)^2}$$

$$F(z) = z - \frac{z}{(z+3)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{z - \frac{z}{(z+3)^2}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{z\right\}(t) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+3)^2}\right\}(t)$$

Sabemos que:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = f(t) \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{z\right\}(t) = \delta'(t)$$

Luego, procedemos aplicar el método de los residuos. Notemos que se trata de una función análtica en todo punto, excepto en $z_0 = -3$ el cual es un polo de orden 2. Así:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+3)^2}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} H(t)\text{Res}\left(\frac{e^{zt}z}{(z+3)^2}\,, -3\right)$$

Por otro lado:

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}z}{(z+3)^2}\,, -3\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\longrightarrow -3}\frac{d^1}{dz^1}\left[(z-(-3))^2\frac{e^{zt}z}{(z+3)^2}\right] = \lim_{z\longrightarrow -3}\frac{d}{dz}\left[e^{zt}z\right] = ...$$

$$... = \lim_{z\longrightarrow -3} e^{zt}\left(1 + tz\right) = e^{-3t}\left(1 - 3t\right)$$

Entonces:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+3)^2}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-3t}\left(1-3t\right)H(t)$$

Finalmente:

$$\boxed{f(t) = \delta'(t) - e^{-3t}\,(1-3t)\,H(t)}$$

29. *Halle la transformada inversa de*

$$G(z) = \frac{e^{-az}}{z^2}(az-1)$$

Solución: Manipulamos algebraicamente la función $G(z)$

$$G(z) = \frac{e^{-az}}{z^2}(az-1) = \frac{ae^{-az}}{z} - \frac{e^{-az}}{z^2}$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace bilateral, diciendo que $G(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(z)\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{ae^{-az}}{z} - \frac{e^{-az}}{z^2}\right\}(t) = a\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}e^{-az}\right\}(t) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}e^{-az}\right\}(t)$$

Tenemos los siguientes resultados notables de transformadas de Laplace bilateral:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)e^{-az}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t-a) \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} H(t) \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} tH(t)$$

Entonces, tenemos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}e^{-az}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}(t-a) = H(t-a)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}e^{-az}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\}(t-a) = (t-a)H(t-a)$$

Así:

$$g(t) = aH(t-a) - (t-a)H(t-a) = aH(t-a) - tH(t-a) + aH(t-a) = -tH(t-a)$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left\{G(z)\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -tH(t-a)}$$

30. *Usando el método de los residuos, halle la distribución causal $u(t)$ cuya transformada de Laplace es:*

$$U(z) = \frac{z^3 - 6z^2 + 10z}{(z-3)^2}$$

Solución: Manipulando algebraicamente el numerador de la función racional:

$$U(z) = \frac{z^3 - 6z^2 + 10z}{(z-3)^2} = \frac{z(z^2 - 6z + 10)}{(z-3)^2} = \frac{z\left[(z-3)^2 + 1\right]}{(z-3)^2} = \frac{z(z-3)^2 + 1}{(z-3)^2} = z + \frac{z}{(z-3)^2}$$

$$U(z) = z + \frac{z}{(z-3)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, donde $U(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\{U(z)\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{z + \frac{z}{(z-3)^2}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{z\right\}(t) + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-3)^2}\right\}(t)$$

Por tabla sabemos los siguientes resultados notables:

$$\mathscr{L}^{-1}\{U(z)\}(t) = u(t) \qquad \mathscr{L}^{-1}\{z\}(t) = \delta'(t)$$

Para hallar la transformada inversa de Laplace de la función racional procederemos a aplicar el método de los residuos. Luego, veáse que se trata de una función análitica (está compuesta de funciones polinómicas, las cuales son análiticas en todo el espacio complejo), excepto en donde se anula el denominador, el cual es el punto $z_0 = 3$. Así, la función tiene un polo doble en $z_0 = 3$. Entonces:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-3)^2}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} H(t)\mathrm{Res}\left(\frac{e^{zt}z}{(z-3)^2}\, , 3\right)$$

Por otro lado:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{zt}z}{(z-3)^2}\, , 3\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\longrightarrow 3}\frac{d^1}{dz^1}\left[(z-(3))^2\frac{e^{zt}z}{(z-3)^2}\right] = \lim_{z\longrightarrow 3}\frac{d}{dz}\left[e^{zt}z\right] = ...$$

$$... = \lim_{z\longrightarrow 3} e^{zt}\left(1 + tz\right) = e^{3t}\left(1 + 3t\right)$$

Entonces:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-3)^2}\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{+3t}\left(1 + 3t\right)H(t)$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace de la función $U(z)$ es:

$$\boxed{u(t) = \delta'(t) + e^{3t}\,(1+3t)\,H(t)}$$

31. *Calcule la transformada inversa de Laplace de:*

$$F(z) = \frac{4z^3}{z^4-1}$$

Solución: Usaremos el método de fracciones simples para separar a F en términos de fracciones más sencillas:

$$F(z) = \frac{4z^3}{z^4-1} = \frac{4z^3}{(z^2+1)(z-1)(z+1)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1} = ...$$

$$... = \frac{(Az+B)(z^2-1) + C(z^2+1)(z+1) + D(z^2+1)(z-1)}{z^4-1}$$

$$\Longrightarrow 4z^3 = (A+C+D)z^3 + (B+C-D)z^2 + (-A+C+D)z + (-B+C-D)$$

$$\left\{\begin{array}{l} A+C+D=4 \\ B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ -B+C-D=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=2 \\ B=0 \\ C=1 \\ D=1 \end{array}\right.$$

Luego, tenemos que:

$$F(z) = \frac{2z}{z^2+1} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$$

$$F(z) = 2\left[\frac{z}{z^2+1} + \frac{z}{z^2-1}\right]$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{2\left[\frac{z}{z^2+1} + \frac{z}{z^2-1}\right]\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow f(t) = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\}(t) + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-1}\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow f(t) = 2\left[\cos(t) + \cosh(t)\right]H(t)$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left\{U(z)\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2\left[\cos(t)+\cosh(t)\right]H(t)}$$

32. *Hallar la transformada inversa de Laplace de la función:*

$$F(z)=\frac{z^3+z^2-2z+1}{z^2-4}$$

Solución: Manipulamos algebraicamente la función $F(z)$

$$F(z)=\frac{z^3+z^2-2z+1}{z^2-4}=\frac{z(z^2-2)+(z^2+1)}{z^2-4}=\frac{z(z^2-4+2)+(z^2-4+5)}{z^2-4}=...$$

$$...=\frac{(z^2-4)(z+1)+2z+5}{z^2-4}=z+1+\frac{2z+5}{z^2-4}=z+1+2\frac{z}{z^2-2^2}+\frac{5}{2}\frac{2}{z^2-2^2}$$

$$F(z)=z+1+2\frac{z}{z^2-2^2}+\frac{5}{2}\frac{2}{z^2-2^2}$$

Aplicando transformada de Laplace inversa donde $F(z)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{z+1+2\frac{z}{z^2-2^2}+\frac{5}{2}\frac{2}{z^2-2^2}\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{z\right\}(t)+\mathscr{L}^{-1}\left\{1\right\}(t)+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-2^2}\right\}(t)+\frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{z^2-2^2}\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow f(t)=\delta'(t)+\delta(t)+\left[2\cosh(2t)+\frac{5}{2}\sinh(2t)\right]H(t)$$

Así:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta'(t)+\delta(t)+\left[2\cosh(2t)+\frac{5}{2}\sinh(2t)\right]H(t)}$$

33. *Sea $g(t)=H(t)\sin(t)$. Obtenga las funciones causales (o generalizadas) $f(t)$ y $h(t)$ tal que:*

$$(f*g)(t)=H(t-1)\left[1-\cos(t-1)\right] \tag{1}$$

$$(f*h)(t)=\delta'(t-1) \tag{2}$$

Solución: No existe otra posible de resolver este problema que usar las propiedades de la Transforma de Laplace Bilateral. Entonces, definimos la transformada de Laplace bilateral donde $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$ y la aplicamos a ambos lados de la igualdad de la ecuación (1):

$$\mathscr{L}\left\{(f*g)(t)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{H(t-1)\left[1-\cos(t-1)\right]\right\}(z)$$

Usando reglas operacionales de la transformada de Laplace bilateral:

$$\left[\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(z)\right]\cdot\left[\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}(z)\right] = \mathscr{L}\left\{H(t-1)\right\}(z) - \mathscr{L}\left\{H(t-1)\cos(t-1)\right\}(z)$$

$$F(z)\cdot\frac{1}{z^2+1} = \frac{e^{-z}}{z} - \frac{ze^{-z}}{z^2+1} \Longrightarrow F(z) = \left(z^2+1\right)e^{-z}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}\right) = \left(z^2+1\right)e^{-z}\left(\frac{z^2+1-z^2}{z(z^2+1)}\right)$$

$$\Longrightarrow F(z) = (z^2+1)e^{-z}\frac{1}{z(z^2+1)} \Longrightarrow F(z) = \frac{e^{-z}}{z}$$

Aplicando transformada de Laplace inversa donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-z}}{z}\right\}(t) \Longrightarrow f(t) = H(t-1)$$

Ya tenemos la función $f(t)$. Ahora, realizamos el mismo procedimiento con la ecuación (2), donde $h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(z)$:

$$\mathscr{L}\left\{(f*h)(t)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{\delta'(t-1)\right\}(z)$$

Usando reglas operacionales de la transformada de Laplace bilateral:

$$\left[\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(z)\right]\cdot\left[\mathscr{L}\left\{h(t)\right\}(z)\right] = \mathscr{L}\left\{\delta'(t-1)\right\}(z)$$

$$\frac{e^{-z}}{z}\cdot H(z) = ze^{-z} \Longrightarrow H(z) = z^2$$

Aplicando transformada de Laplace inversa donde $H(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{H(z)\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{z^2\right\}(t) \Longrightarrow h(t) = \delta''(t)$$

Así, tenemos que las funciones $f(t)$ y $h(t)$ son:

$$\boxed{f(t) = H(t-1) \quad h(t) = \delta''(t)}$$

5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

34. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} xy''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0 \\ \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Solución: Definimos la función causal $u(x) = y(x)H(x-0)$. Esto por la razón que la EDO tiene condiciones iniciales en el punto $x = 0$.
Una vez definida $u(x)$, procedemos a hallar la primera y segunda derivada generalizada de dicha función. Para ello, usaremos la regla de Leibniz:

$$u'_{gen}(x) = [y(x)H(x)]'_{gen} = y'(x)H(x) + y(x)H'_{gen}(x) = y'(x)H(x) + y(x)\delta(x)$$

Veremos la acción de la función generalizada $y(x)\delta(x)$ sobre una función de prueba $\phi(x)$:

$$< y(x)\delta(x)\,|\,\phi(x) >=< \delta(x)\,|\,y(x)\phi(x) >= y(0)\phi(0) = 1{\cdot}\phi(0) =< \delta(x)\,|\,\phi(x) >\Longrightarrow y(x)\delta(x) = \delta(x)$$

$$u'_{gen}(x) = y'(x)H(x) + \delta(x)$$

De forma análoga:

$$u''_{gen}(x) = [y'(x)H(x) + \delta(x)]'_{gen} = y''(x)H(x) + y'(x)H'_{gen}(x) + \delta'(x)$$

$$u''_{gen}(x) = y''(x)H(x) - \delta(x) + \delta'(x)$$

Luego, multiplicamos a ambos lado de la EDO por la función de Heaviside centrada en $x = 0$:

$$H(x)\,[xy''(x) + (1+x)y'(x) + y(x)] = H(x)\cdot 0$$

$$x\,[y''(x)H(x)] + (1+x)\,[y'(x)H(x)] + H(x)y(x) = 0$$

De cada derivada generalizada despejamos a la "derivada clásica" involucrada, es decir, $y'(x)H(x)$ y $y''(x)H(x)$, respectivamente.

$$y'(x)H(x) = u'_{gen}(x) - \delta(x)$$

$$y''(x)H(x) = u''_{gen}(x) + \delta(x) - \delta'(x)$$

Sustituyendo lo anterior en la EDO:

$$x\left[y''(x)H(x)\right] + (1+x)\left[y'(x)H(x)\right] + H(x)y(x) = 0$$

$$x\left[u''_{gen}(x) + \delta(x) - \delta'(x)\right] + (1+x)\left[u'_{gen}(x) - \delta(x)\right] + u(x) = 0$$

Vemos que ahora nuestra EDO se convirtió en una EDO de una función generalizada:

$$xu''_{gen}(x) + (1+x)u'_{gen}(x) + u(x) = -x(\delta(x) - \delta'(x)) - (1+x)(-\delta(x))$$

$$xu''_{gen}(x) + (1+x)u'_{gen}(x) + u(x) = -x\delta(x) + x\delta'(x) + (1+x)\delta(x) = \delta(x) + x\delta'(x)$$

$$xu''_{gen}(x) + (1+x)u'_{gen}(x) + u(x) = \delta(x) + x\delta'(x)$$

Aplicamos la transformada de Laplace bilateral donde $u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\left\{xu''_{gen}(x) + (1+x)u'_{gen}(x) + u(x)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{\delta(x) + x\delta'(x)\right\}(z)$$

$$-\frac{d}{dz}\left(z^2F(z)\right) + zF(z) - \frac{d}{dz}\left(zF(z)\right) + F(z) = 1 - \frac{d}{dz}\left(z\right)$$

Luego, desarrollamos y simplificamos hasta su mínima expresión:

$$-\left(2zF(z) + z^2F'(z)\right) + zF(Z) - \left(F(z) + zF'(z)\right) + F(z) = 1 - 1 = 0$$

$$-2zF(z) - z^2F'(z) + zF(z) - F(z) - zF'(z) + F(z) = 0$$

$$-zF(z) - (z^2+z)F'(z) = 0 \Longrightarrow F(z) + (z+1)F'(z) = 0 \Longrightarrow [(z+1)F(z)]' = 0$$

Integramos con respecto a z:

$$(z+1)F(z) = C \quad C = ctte \Longrightarrow F(z) = \frac{C}{z+1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(x)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{z+1}\right\}(x) \Longrightarrow u(x) = Ce^{-x}H(x)$$

Así, obtuvimos la solución causal a la ecuación diferencial generalizada. Por ende, la función solución a la EDO original es:

$$y(x) = Ce^{-x}$$

Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$, es evidente que: $C = 1$. Finalmente, la solución es:

$$\boxed{y(x) = e^{-x}}$$

35. *Halle una función $w(t)$ tal que:*

$$\begin{cases} \omega''(t) + 16\omega(t) = e^{-t} \\ \omega(0) = 1 \quad \omega'(0) = -1 \end{cases}$$

Solución: Creamos la función causal $u(t) = H(t)\omega(t)$ usando la función de Heaviside centrada en $t = 0$ ya que nuestras condiciones iniciales se encuentran en dicho punto. Luego, hallamos la primera y segunda derivada generalizada de $u(t)$

$$(u(t))'_{gen} = [H(t)\omega(t)]'_{gen} = H(t)\omega'(t) + \delta(t)\omega(t)$$

pero, usando la teoría de funciones generalizadas tenemos, para cualquier función de prueba θ:

$$< \delta(t)\omega(t) \,|\, \theta(t) > = < \delta(t) \,|\, \omega(t)\theta(t) > = \omega(0)\theta(0) = (1)\theta(0) = \theta(0) = < \delta(t) \,|\, \theta(t) >$$

$$\Longrightarrow \delta(t)\omega(t) = \delta(t)$$

Así:

$$u'(t)_{gen} = H(t)\omega'(t) + \delta(t)$$

De igual forma para la segunda derivada generalizada de $u(t)$:

$$(u'(t))'_{gen} = [H(t)\omega'(t) + \delta(t)]'_{gen} = H(t)\omega''(t) + \delta(t)\omega'(t) + \delta'(t)$$

Para cualquier función de prueba θ:

$$< \delta(t)\omega'(t) \,|\, \theta(t) > = < \delta(t) \,|\, \omega'(t)\theta(t) > = \omega'(0)\theta(0) = (-1)\theta(0) = -\theta(0) = < -\delta(t) \,|\, \theta(t) >$$

$$\Longrightarrow \delta(t)\omega'(t) = -\delta(t)$$

Luego:

$$u''(t)_{gen} = H(t)\omega''(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por la función de Heaviside $H(t)$ para transformarla en una ecuación diferencial causal. Así:

$$H(t)\omega''(t) + 16H(t)\omega(t) = H(t)e^{-t}$$

Luego, escribiendo la anterior ecuación en términos de la función causal $u(t)$:

$$[u''(t)_{gen} + \delta(t) - \delta'(t)] + 16\,[u(t)] = H(t)e^{-t}$$

$$u''(t)_{gen} + 16u(t) = H(t)e^{-t} - \delta(t) + \delta'(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace bilateral donde $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\{u''(t)_{gen} + 16u(t)\}(z) = \mathscr{L}\{H(t)e^{-t} - \delta(t) + \delta'(t)\}(z) =$$

Usando reglas operacionales de la transformada de Laplace bilateral:

$$\Longrightarrow z^2F(z) + 16F(z) = \frac{1}{z+1} - 1 + z = \frac{1 - (z+1) + z(z+1)}{z+1} = \frac{z^2}{z+1}$$

$$\Longrightarrow (z^2+16)F(z) = \frac{z^2}{z+1} \Longrightarrow F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z^2+16)}$$

Usaremos el método de fracciones simples para hacer más fácil la antitransformada de Laplace:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z^2+16)} = \frac{Az+B}{z^2+16} + \frac{C}{z+1} = \frac{(z+1)(Az+B) + C(z^2+16)}{(z+1)(z^2+16)}$$

$$\Longrightarrow z^2 = (Az+B)(z+1) + C(z^2+16)$$

Para $z=-1$:

$$(-1)^2 = C((-1)^2+16) = 17C \Longrightarrow C = \frac{1}{17}$$

Para $z=0$:

$$0 = (0+B)(0+1) + \frac{1}{17}(0+16) \Longrightarrow 0 = B + \frac{16}{17} \Longrightarrow B = -\frac{16}{17}$$

Para $z=1$:

$$1^2 = (1+1)\left(A(1) - \frac{16}{17}\right) + \frac{1}{17}(1^2+16) \Longrightarrow 1 = 2\left(A - \frac{16}{17}\right) + 1 \Longrightarrow A = \frac{16}{17}$$

Luego, tenemos que:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z^2+16)} = \frac{16}{17}\frac{z}{z^2+16} - \frac{16}{17}\frac{1}{z^2+16} + \frac{1}{17}\frac{1}{z+1}$$

$$F(z) = \frac{16}{17}\frac{z}{z^2+4^2} - \frac{4}{17}\frac{4}{z^2+4^2} + \frac{1}{17}\frac{1}{z+1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{16}{17}\frac{z}{z^2+4^2} - \frac{4}{17}\frac{4}{z^2+4^2} + \frac{1}{17}\frac{1}{z+1}\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow u(t) = \frac{16}{17}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+4^2}\right\}(t) - \frac{4}{17}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{z^2+4^2}\right\}(t) + \frac{1}{17}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow u(t) = \left[\frac{16}{17}\cos(4t) - \frac{4}{17}\sin(4t) + \frac{1}{17}e^{-t}\right]H(t)$$

Obtuvimos la solución causal $u(t)$ de la ecuación diferencial causal. Luego, la solución a nuestra ecuación diferencial es:

$$\boxed{\omega(t) = \frac{16}{17}\cos(4t) - \frac{4}{17}\sin(4t) + \frac{1}{17}e^{-t}}$$

36. *Resuelva:*

$$\begin{cases} ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 2e^t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: Planteamos la siguiente función causal $u(t) = H(t)y(t)$. Se multiplicó a la función $y(t)$ por la función de Heaviside centrada en $t = 0$ ya que ahí se encuentran definidas las condiciones iniciales del problema. Luego, procedemos a multiplicar la ecuación diferencial por la función de Heaviside centrada en $t = 0$:

$$H(t)\left[ty''(t) + 2y'(t) + ty(t)\right] = H(t)2e^t \Longrightarrow t\left[H(t)y''(t)\right] + 2\left[H(t)y'(t)\right] + t\left[H(t)y(t)\right] = H(t)2e^t$$

Procedemos a hallar las derivadas de segundo y primer orden de la función $y(t)$ en función de la nueva función causal $u(t)$. Para ello, derivamos generalizadamente dos veces a dicha función:

$$u'_{gen}(t) = y'(t)H(t) - \delta(t) \Longrightarrow y'(t)H(t) = u'_{gen}(t) + \delta(t)$$

$$u''_{gen}(t) = y''(t)H(t) - \delta'(t) + \delta(t) \Longrightarrow y''(t)H(t) = u''_{gen}(t) + \delta'(t) - \delta(t)$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$t\left[u''_{gen}(t) + \delta'(t) - \delta(t)\right] + 2\left[u'_{gen}(t) + \delta(t)\right] + t\left[u(t)\right] = H(t)2e^t$$

$$tu''_{gen}(t) + 2u'_{gen}(t) + tu(t) = 2e^tH(t) - t\delta'(t) + t\delta(t) - 2\delta(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace bilateral donde $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\{tu''_{gen}(t) + 2u'_{gen}(t) + tu(t)\}(z) = \mathscr{L}\{2e^tH(t) - t\delta'(t) + t\delta(t) - 2\delta(t)\}(z)$$

$$\mathscr{L}\{tu''_{gen}(t)\}(z) + 2\mathscr{L}\{u'_{gen}(t)\}(z) + \mathscr{L}\{tu(t)\}(z) = 2\mathscr{L}\{e^tH(t)\}(z) - \mathscr{L}\{t\delta'(t)\}(z) + \mathscr{L}\{t\delta(t)\}(z) - ...$$

$$... - 2\mathscr{L}\{\delta(t)\}(z)$$

$$-\frac{d}{dz}\left(z^2F(z)\right) + 2zF(z) - \frac{d}{dz}\left(F(z)\right) = 2\frac{1}{z-1} + \frac{d}{dz}\left(z\right) - \cancelto{0}{\frac{d}{dz}(1)} - 2(1)$$

$$-(2zF(z) + z^2F'(z)) + 2zF(z) - F'(z) = \frac{2}{z-1} + 1 - 2 = \frac{2}{z-1} - 1$$

$$-(z^2+1)F'(z) = \frac{2-(z-1)}{z-1} = \frac{2-z+1}{z-1} = \frac{3-z}{z-1} \Longrightarrow F'(z) = \frac{z-3}{(z^2+1)(z-1)}$$

Usamos el método de fracciones simples:

$$F'(z) = \frac{z-3}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{C}{z-1} = \frac{(Az+B)(z-1)+C(z^2+1)}{(z-1)(z^2+1)}$$

$$z-3 = (A+C)z^2 + (-A+B)z + (C-B) \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$F'(z) = \frac{z+2}{z^2+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{z}{z^2+1} + 2\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z-1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F'(z)\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1} + 2\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z-1}\right\}(t)$$

$$-tu(t) = H(t)\cos(t) + 2H(t)\sin(t) - H(t)e^t$$

$$u(t) = \frac{e^t - \cos(t) - 2\sin(t)}{t}H(t)$$

Finalmente, tenemos que la función $y(t)$ es entonces:

$$y(t) = \frac{e^t - \cos(t) - 2\sin(t)}{t}$$

Veamos que, las condiciones iniciales de la función $u(t)$ son del punto $t = 0$, pero en dicho punto parece existir una discontinuidad en la función. Verificamos dicha preocupación:

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - \cos(t) - 2\sin(t)}{t} = \frac{0}{0}$$

Podemos usar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t - \cos(t) - 2\sin(t)}{t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t + \sin(t) - 2\cos(t)}{1} = 1 - 2 = -1 \Longrightarrow y(t\to 0) = -1$$

Calculamos la derivada de $y(t)$:

$$y'(t) = \frac{[e^t + \sin(t) - 2\cos(t)] \cdot t - [e^t - \cos(t) - 2\sin(t)]}{t^2}$$

De igual forma, $y'(t)$ parece presentar la misma discontinuidad en $t = 0$. Usamos la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{[e^t + \sin(t) - 2\cos(t)] \cdot t - [e^t - \cos(t) - 2\sin(t)]}{t^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot [e^t + \cos(t) + 2\sin(t)]}{2t} = ...$$

$$... = \lim_{t\to 0} \frac{e^t + \cos(t) + 2\sin(t)}{2} = \frac{1+1+0}{2} = 1 \Longrightarrow y'(t \to 0) = 1$$

Veamos que se cumplen ambas condiciones iniciales. Por ende:

$$\boxed{y(t) = \frac{e^t - \cos(t) - 2\sin(t)}{t}}$$

37. *Halle la solución causal de:*

$$\begin{cases} \omega''(x) - 2\omega'(x) + \omega(x) = -1 \\ \omega(-1) = 1 \\ \omega'(-1) = 2 \end{cases}$$

Solución: Denominamos a la función $u(x) = \omega(x)H(x+1)$. Esto con la idea de generar una función que se encuentra definida en los números reales, que permita aplicar las propiedades de la transformada de Laplace bilateral. Se realizó con la función de Heaviside centrada en el punto $x = -1$ ya que a partir de ahí se encuentra definida la función $\omega(x)$.
Multiplicamos por la función de Heaviside centrada en $x = -1$ a la ecuación diferencial:

$$H(x+1)\,[\omega''(x) - 2\omega'(x) + \omega(x)] = H(x+1)\,[-1]$$

$$H(x+1)\omega''(x) - 2H(x+1)\omega'(x) + H(x+1)\omega(x) = -H(x+1)$$

Ahora, tenemos que conseguir la expresión de las funciones $H(x+1)\omega''(x)$, $H(x+1)\omega'(x)$ y $H(x+1)\omega(x)$. Para ello, haremos la derivada generalizada de la nueva función $u(x)$. Note que se usará la regla de Leibniz para hallar dichas derivadas generalizadas, recordando que la derivada generalizada de la función $\omega(x)$ es la derivada clásica de la misma, ya que se asume que esta es continua en el dominio que se encuentra definida:

$$u'_{gen}(x) = \omega'(x)H(x+1) + \omega(x)H'_{gen}(x+1) \Longrightarrow u'_{gen}(x) = \omega'(x)H(x+1) + \omega(x)\delta(x+1)$$

$$\Longrightarrow u'_{gen}(x) = \omega'(x)H(x+1) + \omega(-1)\delta(x+1) \Longrightarrow \omega'(x)H(x+1) = u'_{gen}(x) - \omega(-1)\delta(x+1)$$

$$\omega'(x)H(x+1) = u'_{gen}(x) - \delta(x+1)$$

$$u''_{gen}(x) = \left(\omega'(x)H(x+1) + \omega(-1)\delta(x+1)\right)'_{gen} \Longrightarrow u''_{gen}(x) = \omega''(x)H(x+1) + \omega'(x)H'_{gen}(x+1) + \delta'(x+1)$$

$$\Longrightarrow u''_{gen}(x) = \omega''(x)H(x+1) + \omega'(x)\delta(x+1) + \delta'(x+1) \Longrightarrow u''_{gen}(x) = \omega''(x)H(x+1) + 2\delta(x+1) + \delta'(x+1)$$

$$\omega''(x)H(x+1) = u''_{gen}(x) - 2\delta(x+1) - \delta'(x+1)$$

Luego, sustituimos las expresiones en la EDO:

$$\left[u''_{gen}(x) - 2\delta(x+1) - \delta'(x+1)\right] - 2\left[u'_{gen}(x) - \delta(x+1)\right] + u(x) = -H(x+1)$$

$$u''_{gen}(x) - 2u'_{gen}(x) + u(x) = -H(x+1) + \delta'(x+1)$$

Aplicamos la transformada de Laplace bilateral donde $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\left\{u''_{gen}(x) - 2u'_{gen}(x) + u(x)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{-H(x+1) + \delta'(x+1)\right\}(z)$$

Usamos propiedades y transformadas notables de la Transformada de Laplace Bilateral:

$$\mathscr{L}\left\{u''_{gen}(x)\right\}(z) - 2\mathscr{L}\left\{u'_{gen}(x)\right\} + \mathscr{L}\left\{u(x)\right\}(z) = -\mathscr{L}\left\{H(x+1)\right\}(z) + \mathscr{L}\left\{\delta'(x+1)\right\}(z)$$

$$z^2F(z) - 2zF(z) + F(z) = -\frac{e^z}{z} + ze^z \Longrightarrow (z-1)^2F(z) = e^z\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

$$F(z) = \frac{e^z\,(z+1)}{z(z-1)}$$

Separamos en fracciones simples la función $F(z)$:

$$\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+Bz}{z(z-1)} \Longrightarrow z+1 = A(z-1) + Bz \Longrightarrow z+1 = (A+B)z - A$$

Se ve claramente que: $A = -1$ y $B = 2$. Entonces:

$$F(z) = e^z\left(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1}\right) = -\frac{e^z}{z} + 2\frac{e^z}{z-1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{e^z}{z} + 2\frac{e^z}{z-1}\right\}$$

$$u(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{e^z}{z}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^z}{z-1}\right\} \Longrightarrow u(x) = -H(x+1)+2e^{x+1}H(x+1) = (2e^{x+1}-1)H(x+1)$$

Luego, como $u(x) = \omega(x)H(x+1)$, entonces decimos que:

$$\boxed{\omega(x) = 2e^{x+1} - 1}$$

38. *Resuelva*

$$\begin{cases} xy''(x) + (1-3x)y'(x) - 3y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Solución: Definimos a la función $u(x) = y(x)H(x)$. La participación de la función de Heaviside centrada en el punto $x = 0$ resulta de suma utilidad ya que se logra crear una función $u(x)$ que se encuentra definida en todos la recta real, lo cual conviene por las extraordinarias propiedades que posee la transformada de Laplace bilateral. La elección de centrar a la función de Heaviside en dicho punto viene por el hecho que a partir de $x = 0$ es que se encuentra definida la función $y(x)$ (Véalo como si la variable independiente x es el tiempo. Antes de ese instante inicial no se conoce nada sobre el comportamiento de la función).
Así, se procede a multiplicar a la EDO por la función Heaviside $H(x)$ para lograr una nueva EDO que sea en términos de la función $u(x)$.

$$H(x)\left[xy''(x) + (1-3x)y'(x) - 3y(x)\right] = 0$$

$$xH(x)y''(x) + (1-3x)H(x)y'(x) - 3H(x)y(x) = 0$$

Ahora solo falta expresar las nuevas funciones $H(x)y''(x)$ y $H(x)y'(x)$ en términos de la función $u(x)$. Para ello, derivamos de forma generalizada la función $u(x)$, haciendo uso de la regla de

Leibniz para funciones generalizadas. Note que se asume que la función $y(x)$ es una función continua en todo su dominio $x \in [0, \infty)$; por ende, su derivada generalizada corresponde a su derivada clásica.

$$u'_{gen}(x) = y'(x)H(x) + y(x)H'_{gen}(x) \Longrightarrow u'_{gen}(x) = y'(x)H(x) + y(x)\delta(x)$$

$$\Longrightarrow u'_{gen}(x) = y'(x)H(x) + y(0)\delta(x) \Longrightarrow y'(x)H(x) = u'_{gen}(x) - \delta(x)$$

$$u''_{gen}(x) = (y'(x)H(x) + y(0)\delta(x))'_{gen} \Longrightarrow u''_{gen}(x) = y''(x)H(x) + y'(x)H'(x) + \delta'(x)$$

$$\Longrightarrow u''_{gen}(x) = y''(x)H(x) + y'(x)\delta(x) + \delta'(x) \Longrightarrow u''_{gen}(x) = y''(x)H(x) + y'(0)\delta(x) + delta'(x)$$

$$\Longrightarrow y''(x)H(x) = u''_{gen}(x) - \delta'(x) - 3\delta(x)$$

Finalmente, sustituimos las igualdades alcanzadas anteriormente en la EDO y, con ello, logramos expresar la EDO en términos de las derivadas generalizadas de la función $u(x)$:

$$x\left[u''_{gen}(x) - \delta'(x) - 3\delta(x)\right] + (1-3x)\left[u'_{gen}(x) - \delta(x)\right] - 3u(x) = 0$$

$$xu''_{gen}(x) - x\delta'(x) - 3x\delta(x) + (1-3x)u'_{gen}(x) - \delta(x) + 3x\delta(x) - 3u(x) = 0$$

$$xu''_{gen}(x) + (1-3x)u'_{gen}(x) - 3u(x) = x\delta'(x) + \delta(x)$$

Aplicamos la transformada de Laplace bilateral donde $u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$:

$$\mathscr{L}\left\{xu''_{gen}(x) + (1-3x)u'_{gen}(x) - 3u(x)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{x\delta'(x) + \delta(x)\right\}(z)$$

Usamos propiedades y transformadas notables de la Transformada de Laplace Bilateral:

$$\mathscr{L}\left\{xu''_{gen}(x)\right\}(z) + \mathscr{L}\left\{u'_{gen}(x)\right\} - 3\mathscr{L}\left\{xu'_{gen}(x)\right\}(z) - 3\mathscr{L}\left\{u(x)\right\}(z) = \mathscr{L}\left\{x\delta'(x)\right\}(z) + \mathscr{L}\left\{\delta(x)\right\}(z)$$

$$-\frac{d}{dz}\left(z^2F(z)\right) + zF(z) + 3\frac{d}{dz}\left(zF(z)\right) - 3F(z) = -\frac{d}{dz}(z) + 1$$

$$-\left(2zF(z) + z^2F'(z)\right) + zF(z) + 3\left(F(z) + zF'(z)\right) - 3F(z) = -1 + 1 = 0$$

$$-2zF(z) - z^2F'(z) + zF(z) + 3F(z) + 3zF'(z) - 3F(z) = 0$$

$$\left(-z^2 + 3z\right) F'(z) + (-2z + z + 3 - 3)\, F(z) = 0 \Longrightarrow z\,(-z + 3)\, F'(z) - zF(z) = 0$$

$$\Longrightarrow (z - 3)\, F'(z) + F(z) = 0 \Longrightarrow [(z - 3)F(z)]' = 0$$

Integramos con respecto a z:

$$(z - 3)F(z) = C \quad C = ctte \Longrightarrow F(z) = \frac{C}{z - 3}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace bilateral donde $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(x)$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(z)\right\}(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{z - 3}\right\}(x) \Longrightarrow u(x) = Ce^{3x}H(x)$$

Así, obtuvimos la solución causal a la ecuación diferencial generalizada. Por ende, la función solución a la EDO original es:

$$y(x) = Ce^{3x}$$

Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 3$, es evidente que: $C = 1$. Finalmente, la solución es:

$$\boxed{y(x) = e^{3x}}$$